الطريقة البديهية
في المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية
Axiomatic Method

الاستاذ الدكتور ياسين خليل

مقدمة البحث :

يتركز موضوع البحث حول نقطة جوهرية رافقت تطور العلوم النظرية ، وبالتحديد حول الطريقة العلمية التي اخذت بها العلوم المضبوطة مثل المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية ، واستفادت منها العلوم الاخرى في عرض مفاهيمها ومبادئها • وغايتنا من ذلك بيان ما وصلت اليه الطريقة البديهية في بناء العلوم من جهة ، والاسس المنطقية او الصورية التي تجمع بين العلوم النظرية من جهة اخرى •

يعرّف المنطق Logic عادة بانه علم استدلالي Deductive Science يهتم بتحليل القضايا Propositions والبرهان Proof • فموضوع بحث المنطق الذي يرتبط بالرياضيات والفيزياء يتعين بالصيغ والاشكال في متواليات محدودة تتلازم منطقيا بعضها ببعض ، واستنتاج صيغ جديدة من اخرى مفروضة • ونستدل من تعريف المنطق وموضوعه ان اهتمام البحث ينصب على المنطق الصوري Formal Logic او المنطق الرياضي Mathematical Logic ، وعلى نوع واحد من القضايا التي تتميز بكونها اما صادقة او كاذبة • وبعبارة اخرى : ان المنطق الذي تتناوله بالبحث هو منطق ذو قيمتين Two-valued Logic •

وفي حقل الرياضيات لا بد من التمييز بين الرياضة البحتة Pure Mathematics والرياضة التطبيقية Applied Mathematics

لان اهتمامنا ينصب على الرياضة البحتة دون غيرها لصلتها الوثيقة بالمنطق الصوري • وقد ذهب دافيد هلبرت (١٨٦٢ ــ ١٩٤٣) في التمييز بين الرياضة البحتة والرياضة التطبيقية الى حد الاعتقاد بالقطيعة بينهما • وهنا اورد نصا يذكره جورج جاموف (١٩٠٤ ــ ١٩٦٨) عن نظرة هلبرت الى الرياضة البحتة والرياضة التطبيقية : « كثيرا ما يبلغنا ان الرياضة البحتة والرياضة التطبيقية بينهما خصومة ، وهذا لا اساس له من الصحة • فالرياضة البحتة والرياضة التطبيقية ليست بينهما خصومة • والرياضة البحتة والرياضة التطبيقية لم تكن بينهما خصومة على الاطلاق في يوم من الايام • والرياضة البحتة والرياضة التطبيقية لن تكون بينهما خصومة • والرياضة البحتة والرياضة التطبيقية لا يمكن ان تكون بينهما خصومة لانه لا توجد بينهما في الواقع ، اية علاقة على الاطلاق[1] •

وعلى الرغم من محاولة هلبرت وضع حدود فاصلة بين الرياضة البحتة والرياضة التطبيقية استجابة لبرنامجه الصوري الذي يرمي الى تجريد الرياضة البحتة وعرضها على هيئة رمزية وصورية بحتة ،بحيث لا تمت الرموز والصيغ فيها بصلة للعالم الخارجي ، فأن معظم فروع الرياضة البحتة وجدت لها تطبيقات مثمرة في علم الفيزياء ، ومن ابرز الامثلة على ذلك نظرية الزمر Groups ، والهندسة غير الاقليدية والجبر غير التبديلي Non Commutable Algebra .

ويختلف تعريف الرياضة البحتة من مدرسة فكرية الى اخرى ، فهي بالنسبة للمدرسة الصورية Formalistic بزعامة هلبرت العلم الذي يهتم بالبنية الصورية للرموز والصيغ فقط ، بينما يعرف برتراند رسل (١٨٧٢ ــ ١٩٧٠) الرياضة البحتة من وجهة نظر المدرسة المنطقية Logistic ، بأنها فرع من المنطق ، وانها فئة جميع القضايا ذات الشكل (ق تستلزم ل) حيث تكون ق و ل قضايا تحتوي على متغير واحد او اكثر كما تكون المتغيرات نفسها في

القضيتين، ولا تحتوي ق و ل اي ثوابت ما عدا الثوابت المنطقية»[٢].

واذا ابتعدنا عن الالتزام ببرنامج معين في تحديد الرياضة البحتة، فأننا نستطيع ان ننظر اليها من زاوية صورية وعلى اساس انها علم يعتمد البرهان والرمزية والصورية، حيث تتعين مقدمات نظرياته باعتبارها بديهيات والنتائج المشتقة من المقدمات من دون الاهتمام بما تشير اليه الصيغ والرموز والاكتفاء بالاستدلال والاشتقاق في الانتقال من صيغة الى اخرى .

ان الذي يميز المنطق عن الرياضة البحتة هو مجموعة المفاهيم التي يستخدمها المنطق، ومجموعة المفاهيم التي تستخدمها الرياضة البحتة، ويتفقان معا في البرهان والرمزية والصورية . وهذا معناه ان معاملتنا للمنطق والرياضة البحتة في بحثنا ستكون واحدة .

يعرّف مكسويل (١٨٣١ ــ ١٨٧٩) علم الفيزياء بانه ذلك القسم من المعرفة الذي يتعلق بنظام الطبيعة، او بكلمات اخرى، يتعلق بالتعاقب المنتظم للحوادث[٣] . ولكن هذا التعريف يشير بوضوح الى موضوع بحث علم الفيزياء ولا يكشف عن طبيعة النظرية الفيزياوية، كما يوضح في الوقت نفسه وضع علم الفيزياء واهتماماته في القرن التاسع عشر . ان النظريات الفيزياوية الحديثة تتجه الى التجريد الرياضي، وبالتالي الى عرض بنية العالم وليس الى وصفه او تعليله، وذلك عن طريق استعمال الرموز التي يعتمد بعضها على بعض[٤] . ان افضل تحديد لطبيعة النظرية الفيزياوية ما يورده البرت اينشتاين (١٨٧٩ ــ ١٩٥٥) بقوله : « يتألف النظام الجاهز للفيزياء النظرية من مفاهيم وقوانين اساسية تصلح لاي مفهوم، ومن قضايا مشتقة من القوانين الاساسية بواسطة استدلال منطقي »[٥] .

نستدل من ذلك ان اتجاه الفيزياء النظرية في بناء الانظمة المختلفة واستعانتها بالطريقة البديهية وما تنطوي عليه من قواعد وشروط منطقية يمثل جوهر المسألة التي نحن بصدد بحثها، لانه يمهد السبيل

امامنا لتوحيد المنطق والرياضة البحتة والفيزياء النظريـــة على أُسس واحدة • وبعبارة اخرى : ان الاتفـاق في الطريقة بين العلوم الثلاثـــة مسألة جوهرية في عرض هذه العلوم في نظام واحد او لغة واحـدة او حساب منطقي صوري واحد • وفي ضوء هذه النتيجـة نستطيع الآن مناقشة جوانب الطريقة البديهية متمسكين اولا بعرض الخصـــائص الصورية للعلوم الثلاثة ، وبيان الاختلافات فيما بينها بعد ذلك ثانيا •

التحليل المنطقي للمفاهيم

اذا دققنا النظر من زاوية التحليل المنطقي في الانظمة المنطقيـــة والرياضية والفيزياوية قصد التعرف على البنية الداخلية لكل منهـا ، فاننا سرعان ما نكشف ان هذه الانظمة تتألف من صيغ وعبـــارات وقوانين ، وانها تتألف بدورها من رموز Symbols او حـدود Terms هي بشابة الوحدات الاساسية او اللبنات الاولى التي يقوم عليها بناء النظام •

تعريف الرمز : الرمز هو اصغر وحدة بنائية لا يمكن تجزئتهـا الى وحدات اصغر منها •

ان تعريف الرمز اخذ بنظر الاعتبار الجانب الصوري على اساس ان الرمز يمثل اصغر عنصر (او وحدة) تتالف منه الصيغ ، وهواضافة الى ذلك غير قابل للتجزئة • ان الرموز او الحدود في الانظمة المختلفة ليست ذات طبيعة او وظيفة واحدة ، بل انهـا تختلف باختلاف العلم الذي تنتمي اليه ، كما تختلف في وظائفها تبعا لمقتضيات البحث والدور الذي اسند اليها • ولكن اذا نظرنا الى المسألة من زاوية صوريـــة بحتة ، فاننا نميز بين الرموز في ضوء ما نحدده لها من ادوار • واول ما يصادفنا في التحليل المنطقي للنظام ان الرموز تظهـر في مجموعتين متميزتين هما : مجموعة المتغيرات Variables ومجموعة الثوابت Constants ، كما نجد كذلك ان الثوابت المنطقية مختلفة عـن

الثوابت الرياضية والثوابت الفيزياوية • واذا اهملنا الاختلافات بين الثوابت استجابة لبرنامجنا الصوري ، ونظرنا الى الثابت من زاوية صورية عامة ، فأن تعريف المتغير وتعريف الثابت يكون على الوجه الآتي :

تعريف المتغير : المتغير هو رمز ليس له معنى ثابت ، فهو يشير الى فراغ يمكن ان تحل محله فئة او مجموعة اشياء •

تعريف الثابت : الثابت هو رمز له معنى (او دور) ثابت لا يتغير عند ارتباطه برموز اخرى •

ونميز كذلك بين المتغيرات ، فمنها متغيرات تظهر كجزء من صيغة قضية مثال ذلك H (أ) ، R (أ ، ب) ، R^3 (أ ، ب ، جـ) حيث تشير الحروف أ ، ب ، جـ الى متغيرات ، اما H فيشير الى محمول يحمل على أ ، بينما تشير R الى علاقة . ومنها متغيرات قضايا تظهر في صيغة قضية اكثر تعقيدا مثال ذلك ق U ل ← ل U ق حيث تشير كل من ق و ل الى متغيرات قضايا . وبينما نضع مكان أ ، ب ، جـ وغيرها فئة اشياء ، فأننا نضع مكان ق ، ل وغيرها قضايا فقط .

ومن الثوابت ما هو منطقي مثل الروابط المنطقية Logical Connectives وهي : النفي ¬ Negation ، والبدل U Disjunction والعطف ∩ Conjunction ، والشرطية او الالزام ← Implication والمساواة ↔ Equivalence وخط شيفر | Sheffer's Stroke . وتوجد ثوابت منطقية اخرى تسمى اسوار القضايا Quantificators وهي « كل أ » ونرمز له بالرمز (أ) ، ويوجد واحد على الاقل ونرمز له (E أ) . والى جانب ذلك توجد ثوابت منطقية اخرى مثل « عضو في فئة » ، و « ينتمي الى » وغيرها .

امـــا الثوابت الرياضية فابسط مثال عليها الاعداد الطبيعيـة ١،٢،٣،٠٠٠، وكذلك الجذور المختلفة والعلامات الاربـع في الحساب الاعتيادي وغيرها • والثوابت الفيزياوية كثيرة منها ثابت الجاذبية ، وثابت بلانك ، وثابت اينشتاين ، وثابت سرعة الضوء ، وهي جميعها ثابتة في جميع الصيغ الفيزياوية التي تظهر فيهـا • وبصورة عامـــة نستطيع تقسيم الثوابت الى مجموعتين هما : مجموعة الثوابت المنطقية ومجموعة الثوابت غير المنطقية التي قـد تكـون ثوابـت رياضية او فيزياوية او اي ثوابت لموضوع آخر • ومن الضروري الاشارة كذلك الى ان المتغيرات المرتبطة بسور القضيـــة الكلي او بسور القضيـة « يوجد واحد على الاقل » هي متغيرات مقيدة ، في حين تكون المتغيرات غير المرتبطة بأي سور قضية متغيرات حرة •

تعريف المتغير المقيد Bound Variable : المتغير المقيـد متغير مرتبط بسور قضية كلي او مرتبط بسور القضية « يوجد واحد على الاقل » •

تعريف المتغير الحر Free Variable : المتغير الحر متغـير غير مرتبط بسور قضية (سواء كان سور القضية كليـــا او جزئيا ، (يوجد واحد على الاقل)) •

ان التحليل المنطقي للعلوم يقودنا الى ضـــرورة التعرف علـى المفاهيم المستخدمة في كل نظرية او نظام علمي ، وعلى اساســـس ان اختلاف نظرية عن اخرى ، بل واختلاف العلوم فيما بينها هو اختلاف في المفاهيم • ومن الضروري ان نميز بين المفاهيم المنطقية والمفـاهيم الوصفية او المفاهيم الخاصة بكل علم ، اذ نجد في الرياضة البحتـة مفاهيم منطقية تشكل العمود الفقري في النظرية الاستدلالية ، كمـا نجد الى جانبها مفاهيم خاصة بالنظرية الرياضية • ومـا يصدق علـى الرياضة البحتة يصدق كذلك على الفيزياء النظريـة والعلوم الاخرى التي تأخذ بالطريقة البديهية في البناء • ففي النظرية المنطقية نجد قائمة

كبيرة من المفـــاهيم سواء ما كان منها في حســـاب القضـــايا Calculus of Propositions او حســـاب دالات القضـــايا Calculus of Propositional Functions او حساب الفئات Calculus of Classes او حســـاب العلاقـــات Calculus of Relations ، فمفهوم « القضية » ومفهوم « دالـة القضية » ومفهوم «الفئة» ومفهوم « الصدق » وغيرها من المفـاهيم المنطقية • واذا انتقلنا الى نظرية الاعداد الطبيعية لبيـانو (١٨٥٨ — ١٩٣٢) فأننا سرعان ما نجد ثلاثة مفاهيم اساسية هي «العـدد» و « التابع او التالي » و «الصفر» اضافة الى مفاهيم منطقيـــة اخرى تساهم في بناء النظرية • وفي الهندسة الاقليدية بشكلها التقليدي نجد كذلك قائمة من المفاهيم مثل « النقطة » و « المستقيم » و «المستوى» و«الزاوية» وغيرها•وفي الهندسة كما عرضها هلبرت في كتابه « أسس علم الهندسة »(٦) نجد كذلك قائمة من المفاهيم مثل «النقطـــة» و «المستقيم» و «المستوى» و «يقع على» و «بين» وغيرها من المفاهيم المنطقية • وفي النظرية الفيزياوية الميكانيكية نجد قائمة من المفاهيـــم مثل «الكتلة» و «الزمن» و «المكان» و «السرعـــة» و «الزخم» و «القوة» و «التسارع» وغيرها من المفاهيم •

ان الطريقة البديهية لا تتوقف عند الكشف عن المفاهيـــم ، وان التحليل المنطقي لا يتوقف عند معرفة علاقات هذه المفاهيم في الصيغ المختلفة ، بل لا بد من التمييز بين المفاهيم على اساس ان بعضها اولي وغيرمعرّف،ويطلق عليها اسم« اللامعرّفات Undefinables » وبعضها معرّف ، نستطيع تعريفه بواسطـة اللامعرّفـات ويطلق عليهـا اسم « المعرّفـــات Definables » وهذه الطريقـــة المستخدمة في المنطق تسمى عادة بطريقة الرد Reduction على اساس ارجاع جميع المفاهيم الى اقل عدد ممكن من المفاهيم الاولية غير المعرّفـة ،

وهي طريقة مهمة ومستخدمة في الرياضيات والفيزياء النظرية وعلوم اخرى .

وتلعب نظرية التعريف دورها الاساس في تحقيق عملية الرد ، فبالتعريف نستطيع ان نرجع المفاهيم بعضها الى بعض حتى نصل الى المفاهيم التي لا يمكن تعريفها او لا يمكن ردها الى مفاهيم اولية اخرى .

ان مسألة اختيار المفاهيم الاولية تتوقف عادة على وجهة نظر الباحث فمنهم من يختار بعض المفاهيم باعتبارها لا معرّفات في نظريته ، بينما يختار باحث آخر مفاهيم اخرى غيرها ، فيعرّف المفاهيم اللامعرّفةفي النظريةالسابقة،فالمسالة برمتها اصطلاحية Conventional لا غير .

ففي حقل منطق القضاياودالات القضايا مثلا نستطيع ان نختار النفي والبدل من الروابط المنطقية لامعرّفات ، وهذه هي الطريقة التي اخذ بها رسل في « اصول الرياضيات »[٧] ، وعرف بواسطتها بقية الروابط ، كما اختار جوتلوب فريجه (١٨٤٨ ــ ١٩٢٥) النفي والشرطية في كتابه « اللغة الرمزية »[٨] لامعرّفات لتعريف جميع الروابط المنطقية الاخرى .

اذا اتخذنا الآن النفي والعطف وسور القضية الكلي لا معرّفات فأننا نستطيع تعريف بقية الروابط المنطقية على الوجه الآتي :

تعريف البدل : ق U ل = ت ⊢ (⊢ ق ∩ ⊢ ل)

تعريف الشرطية : ق ← ل = ت ⊢ (ق ∩ ⊢ ل)

تعريف المساواة :

ق ↔ ل = ت ⊢ { ⊢ (ق ∩ ل) ∩ ⊢ (ق ∩ ⊢ ل)}

تعريف سور القضية (يوجد واحد على الاقل) بواسطة النفي وسور الكلي .

(أ E) H أ = ت ⊢ { (أ) ⊢ H أ }

ونستطيع الآن ان نخطو خطوة اخرى في سبيل رد النفي والعطف الى رابطة منطقية واحدة هي خط شيفر Sheffer's stroke على الوجه الآتي :ـ

تعريف النفي : ¬ ق = ت ق | ق

تعريف العطف : ق ∩ ل = ت (ق | ل) | (ق | ل)

وبهذه الطريقة ، وبعد تعريف النفي والعطف تكون جميع الروابط المنطقية قد ردت الى رابطة منطقية واحدة هي خط شيفر .

ويصدق الشيء نفسه في حقل الرياضيات فعلى سبيل المثال نأخذ نظرية الاعداد الطبيعية لبيانو ، حيث نجد انها تقوم على ثلاثة مفاهيم اولية ذات صلة بالاعداد هي « العدد Number » و«الصفر Null » و « التابع او التالي Successor » ، وان البديهيات الخمس تعبر عن العلاقات المنطقية بين المفاهيم . فأذا سلمنا بوجهة نظر المدرسة المنطقية على اساس ان جميع المفاهيم الرياضية ترد الى مفاهيم منطقية ، فمن الضروري عندئذ رد المفاهيم الثلاثة الى مفاهيم منطقية .

لقد عالج فريجة في كتابه « أسس علم الحساب » العلاقة بين المفاهيم الحسابية والمفاهيم المنطقية ، وكانت غايته الرئيسة تتلخص في الاجابة على السؤال : ما هو العدد ؟ ، وتطوير الجهاز المنطقي من المفاهيم التي تكون اساسا لتحقيق برنامجه في رد المفاهيم الحسابية الى مفاهيم منطقية . ولم تستخدم المفاهيم المنطقية من قبل فريجه فحسب ، بل اصبحت كذلك حجر الزاوية في تعريف رسل للعدد وللمفاهيم الحسابية الاخرى . ومن هذه المفاهيم مفهوم «الفئة» ومفهوم الفئة الفارغة Nullclass ، ومفهوم « المساواة العددية Gleichzahligkeit » او « المشابهة Similarity » وغيرها . فلاجل تعريف العدد يرى فريجه ضرورة تعريف المساواة العددية[٤] ، ويتم التعريف بالصورة الآتية :ـ

تعريف المساواة العددية : ان العبارة « المفهوم F يساوي عدديا المفهوم G » تعني نفس العبارة » توجد علاقة ϕ تربط واحدا بواحد الاشياء التي تقع تحت المفهوم F مع الاشياء التي تقع تحت المفهوم G »[١٠] .

ولا يختلف تعريف رسل للمشابهة عن تعريف فريجه ، كما ان تعريفات رسل للعدد والصفر والتابع مستقاة من تحليل فريجه للاعداد الطبيعية .

تعريف العدد لفئة : العدد لفئة هو فئة جميع الفئات المشابهة نه وبعبارة اخرى : ان العدد لفئة F هو فئة جميع الفئات المساوية لـ F [١٢] .

تعريف « عدد » : عدد هو اي شيء يكون العدد لفئة ما[١٣] . اما تعريف « الصفر » فانه يعتمد على تعريف الفئة الفارغة . ونعرف الفئة الفارغة على الوجه الآتي :ـ

تعريف الفئة الفارغة : الفئة الفارغة هي فئة تلك الاشياء غير المساوية لنفسها

$$\Lambda = ت (ا) [ا \neq ا]$$

وبعبارة اخرى : ان الفئة الفارغة فئة خالية من الاعضاء . وبذلك ننتقل الآن الى تعريف « الصفر » على الوجه الآتي :

تعريف العدد « ٠ » : ٠ هو فئة عضوها الوحيد هو الفئة الفارغة[١٤] . اما التابع لعدد ما فأن رسل يعرّفه كما يأتي :ـ

تعريف التابع لعدد الحدود في الفئة A هو عدد الحدود في الفئة التي تحتوي على A مع x ، حيث x اي حد لا ينتمي الى الفئة [١٥].

ان مسألة رد المفاهيم الرياضية الى مفاهيم منطقية واعتبار الرياضة البحتة مشتقة من مفاهيم ومباديء منطقية غير مقبولة من قبل هلبرت ومدرسته الصورية ، فهو يرى ضرورة معاملة الرياضيات والمنطق في

مستوى واحد ، وان المفاهيم او الرموز المنطقية والرياضية تكتسب معانيها من وجودها في الصيغ ، وعلى الاخص في البديهيات. فالمفاهيم الاولية في نظرية بيانو لا تحتاج الى تعريف وهي انما تكتسب معانيها من صلاتها وعلاقاتها في البديهيات . وما ينطبق على نظرية بيانو ينطبق كذلك على كل نظرية رياضية ومنطقية . وهنا لا بد من التمييز بين نوعين من التعريف لبيان الاختلاف بين موقف المدرسة المنطقية والمدرسة الصورية : الاول هو التعريف الواضح Explicit Definition الذي نميز فيه طرفين هما الحد المعرَّف Definiendum والحد المعرِّف Definiens ، حيث يظهر في الحد المعرَّف الرمز الذي نريد تعريفه، بينما يظهر في الحد المعرِّف الرموز التي نعرف بواسطتها تعريف الرمز الجديد ، وتفصل الحدين علاقة المساواة التعريفية . والثاني هو التعريف الضمني Implicit Definition الذي يختلف جوهريا عن التعريف الواضح ، لان الرمز لا يتحدد معناه عن طريق الرموز التي سبق تعريفها او التي افترضت انها غير معرَّفة ، بل عن طريق وجود الرمز مع رموز اخرى وعلاقات في الصيغة او الصيغ المنطقية . فبديهيات بيانو تعين معاني الرموز الاولية ضمنيا ، وتحدد وظيفتها ودورها بدقة ، ومثل هذا الموقف ينطبق على كل نظام بديهي يفترض مجموعة من الرموز غير المعرَّفة ، حيث تكون البديهيات فيه تعريفات للرموز التي وردت فيها .

وفي نطاق الهندسة نعرف منذ ان وضع اقليدس (٣٠٠ ق.م تقريبا) نظامه البديهي في كتاب « الاصول Elements » بان هذا العلم يبدأ من مجموعة مفاهيم ذات صلة بالمستقيمات والمستويات والحجوم .

وعلى الرغم من ان التعريفات التي يعرضها اقليدس ليست ذات طبيعة رمزية ، وانها مجرد تعريفات قاموسية تبين معاني المفاهيم حسيا، فأن الهندسة لا تهتم بالمحسوسات اذا نظرنا اليها من زاوية صورية .

ولقد ادرك افلاطون (٤٢٧ـ٣٤٧ ق٠م) ضرورة تخليص المفاهيم الرياضية والهندسية بالذات مما علق بها من محسوس ـ ويظهر هذا التأكيد في قول سقراط : « فلا يدرسون هذا المربع المرسوم او ذلك القطر الذي رسموه ، بل يرمون بفكرتهم الى المربع المطلق والقطر المطلق وهكذا »[١٦] . ومعنى ذلك انه من الضروري التمييز بين الهندسة باعتبارها جزءا من الرياضيات البحتة او النظرية ،والهندسة باعتبارها من العلوم العملية تستخدم في الحياة اليومية . واذا نظرنا الى المسألة برمتها من زاوية حديثة ، فاننا لا بد ان ننظر الى علم الهندسة على اساس انه فرع من الرياضة البحتة ، والهندسة باعتبارها ذات صلة بالعالم الخارجي ، وبالتالي تكون جزءا من علم الفيزياء . وبعبارة اخرى : اننا يجب ان ننظر الى الهندسة من زاويتين : زاوية بحتة على اساس انها تتألف من مفاهيم وبديهيات وقضايا مشتقة منطقيا من البديهيات بواسطة استدلال منطقي ، وزاوية تطبيقية عنداستخدام قضايا الهندسة بعد تفسيرها Interpretation فيزياويا في العلم الفيزياوي .

ان النقد والتحليل الذي مارسه علماء الرياضة في القرن التاسع عشر اثبت ان هندسة اقليدس مليئة بالفجوات ، وان اعادة بناءها على اسس جديدة من الامور الضرورية . وقد اقام هلبرت بالفعل نظاما هندسيا كاملا ، فالعناصر الاولية فيه هي النقاط والمستقيمات والمستويات وان العلاقات بين هذه العناصر تتوزع في ثلاث مجموعات من البديهيات هي بديهيات الربط والترتيب والتطابق .

لقد اثبت هلبرت في هندسته قدرة فائقة في التجريد الرياضي وفي عرض الهندسة بالطريقة الصورية البديهية ، وهي الطريقة التي اصبحت بعدئذ جزءا لا يتجزأ من برنامجه العام في عرض النظريات الرياضية والفيزياوية صوريا وبديهيا[١٧] .

ان علاقة الهندسة بالعالم الخارجي معروفة ، فالقضايا الهندسية

ليست بمعزل عن التطبيق في الحياة اليومية وفي العلوم والفيزياء خاصة. وان البناء البديهي في الهندسة كان دائما منذ كتاب الاصول نمطا يحتذيه علماء الفيزياء في بناء نظرياتهم . وكان علم الميكانيك متأثرا بالطريقة البديهية الى حد بعيد ، وقد توالت محاولات كثيرة ولا تزال[١٨] في عرض افكاره ومبادئه في انظمة بديهية. ومن المحاولات الاولى الجادة هي محاولة هاينريخ هيرتز (١٨٥٧–١٨٩٤) في كتابه « مباديء علم الميكانيك »[١٣] ، حيث استهدف بناء هذا العلم على أسس استدلالية . فالنظرية العلمية هي نظام استدلالي يتألف من مجموعة معينة من افكار اولية ومباديء قلية ، بينما تشتق جميع النتائج من المقدمات لاختبارها تجريبيا .

واذا القينا نظرة على المباديء الاساسية في ميكانيك نيوتن لوجدنا ان الافكار الرئيسة فيها هي « الزمان والمكان والكتلة والقوة»، ولكن هيرتز في بناء نظامه يوجه نقدا شديدا لمفهوم القوة على اساس غموضه وظهوره في اكثر من معنى واحد ، ويكتفي بثلاثة مفاهيم اولية لبناء علم الميكانيك هي « الزمان والمكان والكتلة » ، وهي المفاهيم التي تؤلف القاعدة الاساسية لهندسة الحركات الصرفة Kinematics ومعنى ذلك ان الزمان والمكان والكتلة مفاهيم اولية لا يمكن تعريفها في نظام هيرتز البديهي ، وان كنا نعرف معانيها من خلال ملاحظات الاجسام وهي تتحرك . اما بقية المفاهيم الفيزياوية فيمكن تعريفها بواسطة هذه المفاهيم . وقد خصص هيرتز القسم الاول من كتابه لبناء هندسة الحركات الصرفة لعلمه ان الهندسة اساسية لبناء نظرية ميكانيكية استدلالية .

وما ينطبق على علم الميكانيك ينطبق كذلك على الفروع الفيزياوية الاخرى خاصة بعد ان ادرك علماء المنطق والفيزياء النظرية والرياضيات ضرورة بناء النظريات الفيزياوية من اقل عدد ممكن من الافكار الاولية والمباديء الاساسية . ومعنى ذلك : امام الباحث طريقان : الاول هو

ان تبنى النظرية الفيزياوية من قبل عالم الفيزياء بعد الاستعانة باساليب المنطق ، فتحقق الشروط المنطقيـــة التي يجب ان تستوفيها النظرية ، والثاني هو ان يعاد بناء النظرية الفيزياوية على أُسس بديهية ، وقـد يرافق هذا العمل او قبله عملية نقد منطقية للمفاهيم ليستطيع الباحث ان يتبين من المفاهيم ما هو اولي وما هو غير اولي ، وان يتبين كذلك المعنى الثابت لكل مفهوم او المعنى الذي يجب ان يكتسبه المفهوم في النظرية الفيزياوية • وقد ينسحب هذا النقد والتحليل ليشمل المباديء الاساسية للنظرية لمعرفة المقدمات الضرورية التي يجب ان تكون هي المباديء بحق ، بينما ترفض البقية على اساس انها ليست مقـــدمات ضرورية للنظرية •

التحليل المنطقي للنظام البديهي

لقد ادرك ارسطو (٣٨٤ـ٣٢٢ ق•م) عند تحليله للعلم البرهاني ان المعرفة العلمية لا يمكن ان تكون جميعها برهانية، وانه من الضروري ان تبدأ المعرفة من مقدمات لا يمكن البرهان عليها ، ولا بد لكل علم من مقدمات اولية وضرورية اذ لا توجد معرفة علمية من دون مقدمات• وفي ذلك يقول : « اما مذهبنا فأنه ليس جميع المعرفة برهانية ، فعلى العكس، ان معرفتنا للمقدمات المباشرة او الاولية (Immediate Premisses) مستقلة عن البرهان • (وضرورة ذلك واضح ، لانه لا بد لنـــا من معرفة المقدمات الاولية التي يبدأ البرهان منها • ولما كان ضروريا ان ينتهي الارجاع في الحقائق البديهية ، فان هذه الحقائق يجب ان تكون غير قابلة للبرهـــان)[٢٠] • ويشترط ارسطو في مقدمات المعرفـــة البرهانية ان تكون صادقة ، واولية ، ومباشرة ، وتكون معروفة افضل من النتيجة وسابقة عليها وعللا لها »[٢١] •

كما ميز ارسطو ومن بعده اقليـدس في نظامه الهنـــدسي بين البـــديهية Axiom والمصـــادرة Postulate ، على اساس

ان البديهية مقدمة اولية ضرورية لا تحتاج الى برهان ، وقد تشترك في اكثر من علم واحد ، بينما المصادرة مقدمة خاصة بموضوع البحث وذات صلة بموضوع واحد بعينه • ومن الامثلة على البديهيات : « اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية ، كان المجموع الناتج متساويا » • ومن الامثلة على المصادرات : « جميع الزوايا القائمة متساوية » •

ان التمييز بين البديهية والمصادرة واشتراط الوضوح والمباشرة في البديهية عند بناء النظام البديهي لم يعد موجودا في الانظمة المنطقية والرياضية في الوقت الحاضر • وان الخصيصة الوحيدة الباقية في البديهية هي انها مقدمة ضرورية لا تحتاج الى برهان في النظام الذي اختيرت فيه • وهذا معناه ان اختيار صيغة او قضية في نظام على اساس انها بديهية لا يلزم اختيارها كذلك في نظام بديهي آخر ، اذ من الممكن ان تكون مبرهنة Theorem • وبناء على ذلك يجب ان تكون معرفتنا بالبديهية والمبرهنة من خلال النظام الموجودة فيه •

وفي المنطق والرياضيات ، حيث تسيطر الطريقة الرمزية في عرض المباديء والتعريفات وجميع انواع الصيغ ، لا بد من التمييز بين الصيغ بصورة عامة ، فمنها البديهيات والتعريفات والمبرهنات • ومعنى ذلك ان يكون لكل صيغة خصائص صورية معينة تميزها عن غيرها ، وان تعريف البديهية والمبرهنة لا بد ان يشير الى هذه الخصائص •

تعريف الصيغة : الصيغة متوالية محدودة (او نهائية) تتألف من رموز •

تعريف الصيغة صحيحة البناء : صيغة تخضع لقواعد بنائية Rules of Formation في ترتيب رموزها وارتباطاتها بعضها ببعض •

تعريف البديهية : صيغة صحيحة البناء تقع في البداية باعتبارها مقدمة ضرورية لا تحتاج الى برهان في النظام الذي اختيرت فيه •

تعريف المبرهنة : صيغة صحيحة البناء مشتقة من المقدمات بالضرورة ، فهي صيغة تحتاج الى برهان .

اذا اردنا البرهان على مبرهنة ما ، فاننا نستعين لاجل ذلك بالبديهيات والتعريفات ومبرهنات سبق البرهان عليها في النظام . ومعنى ذلك ان كل عملية برهانية تتألف من صيغ محدودة العدد هي اما بديهيات او مبرهنات سبق البرهان عليها او تعريفات .

تعريف البرهان : البرهان متوالية محدودة تتألف من صيغ هي اما بديهيات او تعريفات او مبرهنات سبق البرهان عليها .

تعريف المشتقة : المشتقة صيغة صحيحة البناء تلزم بالضرورة عن المقدمات ، وتكون آخر حلقة في المتوالية البرهانية .

فعند بناء نظرية منطقية او رياضية توضع في البداية قائمة من المقدمات او البديهيات ، وقد تكون هذه المقدمات قليلة او كثيرة العدد ، ولكن يفضل من الوجهة المنطقية ان يكون عدد المقدمات اقل عدد ممكن . وعندما يواجه عالم المنطق عددا من البديهيات ، ويدرك ان باستطاعته ارجاع بعضها الى بعض ، فانه ولا شك يقوم باختيار تلك البديهيات التي تصلح ان تكون مقدمات للبرهان على بقية البديهيات التي افترضت في النظام السابق .

ومن ابرز الامثلة النظام البديهي لفريجه الذي يتألف في حدود منطق القضايا من ست بديهيات ، ثلاث بديهيات منها تخص الشرطية ، وثلاث بديهيات اخرى تخص النفي والشرطية ، وهي كما يأتي :ـ

١ ـ بديهيات الشرطية :

ق ← (ل ← ق)

[م ← (ل ← ق)] ← [(م ← ل) ← (م ← ق)]

[ن ← (ل ← ق)] ← [(ل ← (ن ← ق)]

٢ ـ بديهيات النفي والالزام :

(ل ⇐ ق) ⇐ (¬ ق ⇐ ¬ ل)

¬ ¬ ق ⇐ ق

ق ⇐ ¬ ¬ ق (٢٢)

وقد اختار فريجه قاعدة التعويض Rule of Substituton وقاعدة الشرط المنطقي Modus Ponens قواعد استنتاجية Rules of Inference وتنص قاعدة التعويض على : انه يمكن الاستعاضة عن متغير قضايا بمتغير آخر او بجملة قضايا معينة ، شريطة ان يحدث التعويض في جميع المواضع التي يظهر فيها متغير القضايا .

وتنص قاعدة الشرط المنطقي على ما يأتي :

ق ⇐ ل ، ق

∴ ل

من صيغتين ق ⇐ ل ، و ق نستنتج صيغة جديدة هي ل .

لقد اثبت جان لوكاسيافج J. Lukasiewics انه بالامكان استبدال بديهيات فريجة الست بنظام منطقي يتألف من ثلاث بديهيات فقط هي:

ق ⇐ (ل ⇐ ق)

[م ⇐ (ل ⇐ ق)] ⇐ [(م ⇐ ل) ⇐ (م ⇐ ق)]

(¬ ق ⇐ ¬ ل) ⇐ (ل ⇐ ق) (٢٣)

وانه من الممكن بناء نظام بديهي لمنطق القضايا يتالف من صيغة واحدة فقط وذلك باستخدام النفي والشرطية .

وفي مجال نظرية الاعداد الطبيعية وجدنا انه بالامكان ردالمفاهيم الاولية فيها الى مفاهيم منطقية . ولما كانت المفاهيم الاولية موجودة في البديهيات ، فمعنى ذلك ان بديهيات بيانو تتحول بفضل التعريف الى قضايا منطقية . ويصبح من البساطة البرهان عليها بواسطة المفاهيم الاولية والقضايا الخاصة بالمنطق(٢٤) .

اما كارناب R. Carnap فقد اتبع طريقا آخر في بناء نظريه الاعداد الطبيعية ، حيث جهزه نظامه المنطقي بعناصر وطرق تجعله يكتفي باتخاذ البديهية الرابعة والثالثة من بديهيات بيانو الخمس : بديهيات في نظامه المنطقي [٣٥] (البديهية الرابعة : الصفر ليس تابعا لاي عدد ، والبديهية الثالثة : ليس للاعداد المختلفة التالي نفسه) .

ان مسألة اختيار البديهيات في الانظمة المنطقية والرياضية متروكة للباحث ، وانها مسألة اصطلاحية ، وليس هناك من سبب يجبر الباحث على اختيار طريق واحد او مجموعة واحدة من البديهيات . وقد اثبتت الدراسات المعاصرة انه بالامكان الاستغناء عن بعض قوانين المنطق في بعض الانظمة البديهية ، فقانون الثالث المرفوع مثلا ليس بديهية او قاعدة استنتاجية ، ولا يمكن البرهان عليه في النظام البديهي للمدرسة الحدسية Intuitionism الذي اقامه هايتنج A. Heyting .

ويتحدث علماء الفيزياء غالباً عن المباديء ، وقد يختلفون في هذه المباديء التي يقوم عليها النظام البديهي للنظرية الفيزياوية . ومن الممكن ان نجد بعض القضايا الفيزياوية العامة وقد اتخذها البعض مباديء ، بينما هي ليست الا قضايا مشتقة او ثانوية . فاذا حددنا ما نعنيه بالمبدأ Principle عن طريق خصائص صورية واستدلالية بحتة ، امكننا عندئذ التمييز بين المبدأ والقضية المشتقة .

تعريف المبدأ : قضية لا يمكن ردها الى قضية او قضايا اخرى ، وانها مع غيرها من القضايا كافية لاستنتاج كافة القضايا بواسطة استدلال منطقي بحت من دون الرجوع الى الخبرة .

وفي ذلك يتحدث هيرتز عن ضرورة بناء علم الميكانيك من افكار اولية ومباديء تربط بينها باعتبارها تمثل ابسط صورة يمكن ان ينتجها علم الفيزياء للاشياء في العالم المحسوس والتغيرات التي تحدث فيه [٣٦] .

ان الشروط التي يجب توفرها في مباديء الفيزياء هي الشروط نفسها التي يجب توفرها في بديهيات المنطق والرياضيات ، لذلك (من الوجهة الصورية) يمكننا ان نتحدث كذلك عن بديهيات علم الميكانيك او بديهيات الديناميكا الحرارية ، وبديهيات الكهرومغناطيسية وغيرها. فالنظام البديهي لعلم الميكانيك كما وضعه هيرتز يتألف من ثلاثة مفاهيم اولية هي المكان والزمن والكتلة ، ومن مبدأ واحد هو مبدأ القصور الذاتي ، وان كانت صياغته مختلفة قليلا عن الصياغة كما جاءت في نظرية نيوتن • اما القضايا الفيزياوية الاخرى فانها تكون مشتقة من المقدمات بواسطة استدلال منطقي فقط •

ان اختيار البديهيات الفيزياوية مقيد بمعيار تجريبي ، اذ لا بد ان تكون هذه البديهيات كافية لاستنتاج كافة القضايا التي سبق ان اثبتتها التجربة في الموضوع الذي تنتمي اليه البديهيات ، وكذلك القضايا التي تحتاج الى اثبات تجريبي • وهنا يكمن جوهر الاختلاف بين ما تكون عليه بديهيات المنطق والرياضيات البحتة ، وما يجب ان تكون عليه بديهيات النظرية الفيزياوية •

وبناء على ما تقدم من تحليل نصل الى نتيجة هامة في الطريقة البديهية المستخدمة في المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية • وهذه النتيجة هي : يتألف النظام البديهي من اربع خطوات هي :

الخطوة الاولى : تمثل ايراد قائمة من الرموز المستخدمة في النظام ، والتمييز بين المعرّف منها وغير المعرّف • وتعريفات للمفاهيم المعرّفة بواسطة المفاهيم او الرموز غير المعرّفة •

الخطوة الثانية : تمثل تثبيت مقدمات اولية هي بديهيات او مباديء باعتبارها اوائل السلسلة الاستدلالية ، ولا يمكن ان ترد الى بديهيات او مباديء في النظام الذي اختيرت فيه •

الخطوة الثالثة : تمثل تثبيت قواعد استنتاجية على اساس انها تقوم بعملية الانتقال من المقدمات الى النتائج •

الخطوة الرابعة : تمثل المبرهنات او القضايا او الصيغ المشتقة من المقدمات بواسطة القواعد الاستنتاجية .

لغة الموضوع واللغة الفوقية

لا شك ان النظام البديهي يعتمد كليا على الصورية ، وان الرموز والصيغ فيه انما ترتبط بعلاقات صورية ، وان الحصول على صيغة جديدة من مقدمات معلومة لا يتم الا بمساعدة قواعد الاستنتاج فقط ومن دون ان يكون لاي شيء خارج عن النظام البديهي علاقة ، فنقول ان الصيغة A مشتقة من المقدمات ، وان البرهان باعتباره متوالية محدودة من صيغ تترابط منطقيا هو الوسيلة الوحيدة والصحيحة لاثبات ان صيغة ما مشتقة او غير مشتقة . ولكن رب سائل يقول : اذا كانت الخصائص الصورية وحدها هي التي تتحكم في النظام البديهي ، فكيف نستطيع التثبت من ان النظام المذكور متين Consistent ، بحيث لا يسمح لنا باشتقاق القضية ونقيضها ؟

من اجل الاجابة على هذا السؤال ارى في البداية ان نميز بين مستويين من العبارات او الصيغ التي يستعملها المناطقة وعلماء الرياضيات ، ونبدأ على سبيل التوضيح بلغة الحياة اليومية . فاللغة العربية التي نستخدمها في الحديث اداة مهمة للتعبير عن الافكار والعواطف والتبادل الفكري بصورة عامة ، فاذا قلت مثلا ان « ابن الهيثم فيلسوف وعالم عربي » ، فأنني اتحدث هنا عن شخصية تاريخية موصفا اياها بالفلسفية والعلمية والعربية في قولنا « فيلسوف وعالم عربي » . ولكن اذا قلت ان «ابن الهيثم اسم عربي» ، فانني لا اتحدث عن ابن الهيثم الفيلسوف والعالم ، بل عن الصفة النحوية لفظ « ابن الهيثم » ، وشتان بين العبارتين . وبمعنى آخر : ان العبارة الاولى هي عبارة شيئية لانها تتحدث عن شخص معلوم ، بينما تتحدث العبارة الثانية عن الخصيصة النحوية للفظ باعتباره اسما .

ان التمييز بين العبارات على اساس مستوياتها اللغوية يقودنا الى التمييز بشكل عام بين لغة الموضوع Object-Language ، واللغة الفوقيـــة Metalanguage . •

تعريف لغة الموضوع : لغة الموضوع هي لغة نتحدث عنها ونتخذها موضوعا او مادة للبحث •

تعريف اللغة الفوقية : اللغة الفوقية هي لغة نتحـــدث بها عن عبارات او صيغ لغة الموضوع •

ويصدق هذا التمييز في العلوم على اساس ان لكل علم لغتـــه الخاصة التي تتألف من مفاهيم او رموز اولية وصيغ واشتقاقات •

ان العلوم التي تستخدم الرياضيات او الطريقـــة الرياضية في التعبير عن حقائقها تكون لغاتها رياضية ، فالمنطق والرياضيات البحتة والفيزياء النظرية من العلوم التي اتخذت من الاســـلوب الرياضي في الترميز والطريقة البديهية نموذجا في بناء لغاتها • وقد وجـدنا بالفعل ان هذه العلوم تشترك في الخصائص الصورية ، وهو الامر الـــذي يساعدنا على القول بانها تكوّن حسابا صوريا Formal Calculus تتفاعل فيه جميعا ، بحيث يصبح هذا الحساب الصوري كافيا لاشتقاق قضايا العلوم الثلاثة صوريا • ومعنى ذلك كذلك ان لغة هـذه العلوم هي لغة صورية وحسابية ، وهذا يقودنا الى ضرورة تعريف « الحساب الصوري » استنادا على المعلومات التي ثبتناها حتى الآن :

تعريف الحساب الصوري : الحساب الصوري هو نظام يتألف من قواعد ذات صلة بالرموز من دون الاشارة الى اي شيء خـــارج عنها ، ومن قواعد تعين طريقة بناء الصيغ ، (الصيغة متوالية محدودة من رموز) ، ومن قواعد تعين الطرق التي يتم بها الانتقال من المقدمات الى النتائج المشتقة عنها •

وفي ضوء التعريف المتقدم نعتبر النظرية المنطقيـــة التي تحقق ما ورد في تعريف الحساب الصوري نظرية صورية ، وكذلك الامـــر

بالنسبة للرياضة البحتة والفيزياء النظرية مع احتفاظ الاخيرة بخصائص تجريبية معينة تستمدها من الرموز الوصفية Descriptive Symbols التي تظهر مع الرموز الصورية في الحساب الصوري •

ونستطيع ان ننظر الى المنطق والرياضة البحتة والفيزياء النظرية من زاوية كونها انظمة او نظريات او لغات ، فنميز على التوالي بين المنطق Logic والمنطق الفوقي Meta-Iogic ، وبين الرياضيات Mathematics والرياضيات الفوقية Meta-Mathematics ، وبين الهندسة Geometry والهندسة الفوقية Meta-geometry وبين الفيزياء Physics والفيزياء الفوقية Meta - Physics (٣٧) •

ومن الامثلة على عبارات من هذه العلوم ما يأتي :

١ ــ في المنطق : « ق ← ق »[للتعبير عن الذاتية]
في المنطق الفوقي : « ق ← ق » صيغة مشتقة من بديهيات حساب القضايا) •

٢ ــ في الرياضيات (الحساب) «٢+٢=٤»
في الرياضة الفوقية « ٢ + ٢ = ٤ صيغة حسابية »

٣ ــ في الرياضيات (الهندسة) : « يمكن رسم مواز واحد فقط من نقطة خارجة عن مستقيم معلوم »
في الرياضة الفوقية : « بديهية التوازي مستقلة عن بقية البديهيات الهندسية »

٤ ــ في الفيزياء النظرية : « يبقى الجسم مستقرا او متحركا على خط مستقيم حركة منتظمة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حركته او اتجاهه »
في الفيزياء الفوقية : « مبدأ القصور الذاتي مقدمة ضرورية في النظام البديهي لهيرتز » •

اذا سلمنا الآن بان النظام او الحساب الصوري الذي يضم المنطق والرياضيات البحتة والفيزياء النظرية هو موضوع بحث من قبل لغة او نظام آخر فان التمييز بشكل عام يتم على اساس ان الحساب الصوري الشامل يمثل لغة الموضوع ، بينما تمثل اللغة التي تصف او تحلل لغة الحساب الصوري اللغة الفوقية • وقد ظهرت في هذا المجال تسميات كثيرة ، فبالنسبة لكارناب نجده يميز بين لغة الموضوع ولغة السنتاكس Syntax - Language [٢٨] ، بينما نجد هلبرت وهو يميز بشكل عام بين الرياضيات الاعتيادية والرياضيات الفوقية • ومن الجدير بالذكر ان هلبرت هو صاحب الفضل في تطوير الرياضة الفوقية ومؤسس ما يسمى نظرية البرهان Beweistheorie كما تسمى في بعض الاحيان •

الخصائص المنطقية للحساب الصوري

المهم في الامر الآن هو دراسة الخصائص المنطقية المشتركة التي يجب ان يستوفيها الحساب الصوري سواء في حقل المنطق او الرياضيات او الهندسة او الفيزياء النظرية ، علما بان صياغة هذه الخصائص انما يتم باللغة الفوقية ، فنقول ان الحساب الصوري الذي نرمز له بالحرف M والذي هو موضوع البحث خال من التناقض ، وان بديهياته مستقلة الواحدة عن الاخرى ، وانه بسيط ، وانه كامل •

سأتناول بالبحث اولا مسألة استقلال البديهيات في الحساب الصوري • نقصد بالاستقلال ان تكون بديهيات الحساب ضرورية جميعها ، بحيث لا يمكن رد بديهية او اكثر الى بديهية او بديهيات الحساب المتبقية • ففي حقل المنطق مثلا نجد ان الحساب المنطقي في كتاب « اصول الرياضيات » لرسل ووايتهيد يحتوي على خمس بديهيات تخص منطق القضايا ، وقد اثبتت الدراسات المنطقية انه بالامكان الاستغناء عن احدى البديهيات وهي :

ق U (ل U م) ⊀ ل U (ق U م)[٢٩] .

ومن الامثلة المشهورة في استقلال البديهيات ما حدث بالنسبة لبديهية التوازي في هندسة اقليدس ، حيث اعتقد علماء الرياضة استنادا على عدم توفر الوضوح اللازم لهذه البديهية ، انه بالامكان اشتقاقها من بديهيات الهندسة الاخرى • وهذا معناه ببساطة : انه اذا توفر برهان لبديهية التوازي عن طريق اشتقاقها من مقدمات نظام الهندسة الاخرى ، فان البديهية المذكورة لا يمكن ان تكون مستقلة عن بقية البديهيات • وقد جرت محاولات كثيرة لتحقيق ذلك ، ولكنها باءت بالفشل جميعا ، واخيرا ثبت بالبرهان الرياضي القاطع ان بديهية التوازي مستقلة ولا يمكن البرهان عليها في نظام اقليدس الهندسي[٣٠]• وهكذا يمكننا صياغة معيار استقلال البديهيات على النحو الآتي :

معيار الاستقلال : يقال ان فئة البديهيات (أ١ ، ٠٠٠٠ أن) مستقلة الواحدة عن الاخرى في حساب صوري معين ، اذا كانت كل بديهية في الفئة غير مشتقة ، فلا يمكن استنتاجها من مقدمات هي بديهية او البديهيات الاخرى في الحساب الصوري • وعلى العكس يقال ان بديهية او اكثر غير مستقلة اذا كانت مشتقة من بديهية او اكثر من بديهيات الحساب الصوري •

وفي الفيزياء النظرية يتحقق هذا المعيار كذلك على الرغم من انه قد يبدو غير تام الوضوح • فاذا افترضنا حساباً صوريا لنظرية فيزياوية معينة ، وقد ثبتت مقدماته على هيئة فئة من مباديء او بديهيات ، فاننا من الوجهة المنطقية نطرح السؤال المتعلق باستقلال هذه المباديء كما فعلنا بالنسبة للمنطق والرياضيات ، اذ من الممكن ان يكون احد المباديء مجرد قضية مشتقة وبالتالي ليس مستقلا عن بقية المباديء • ولقد اشار هيرتز الى هذه الحقيقة بوضوح بان بعض القضايا التي اعتبرت في وقت ما وتحت ظروف خاصة مباديء لا تستحق هذه التسمية ، فمنذ وقت لاجرانج Lagrange لوحظ دائما ان

مبدأ مركز الثقل ومبدأ المساحات ليست في الحقيقة الا مجرد قضايا ذات طبيعة عامة[٣١] .

وقد اشار هلبرت الى هذه الحقيقة كذلك بان معادلات لاجرانج في الحركة والتي تعد بديهيات علم الميكانيك تحتوي على فروض جانبية ليست ضرورية وان نظام الفروض يمكن ان يضغط او يقلل[٣٢].

والخصيصة المنطقية الاخرى هي خلو الحساب الصوري من التناقض ، وذلك بان يكون اختيار المقدمات وقواعد الاستنتاج وبناء الحساب الصوري بصورة عامة متينا ، بحيث لا يسمح في المستقبل بحدوث اي تناقض فيه . ان الحساب الصوري كما بينا يتألف من رموز وصيغ مختلفة من دون ان تكون لهذه العناصر علاقة بعالم الخبرة ، لان الرموز فيه تخضع في ترتيبها وعلاقاتها الى قواعدصورية بحتة . وبعبارة اخرى : ان الرموز والصيغ المختلفة في الحساب الصوري خالية من المعنى ، وانها مجرد ابنية . وهنا يظهر سؤال له اهميته هو : كيف يمكن البرهان على خلو الحساب الصوري من التناقض ، علما بان التناقض معناه ان تكون القضية صادقة وكاذبة معا ، ما دامت صيغ الحساب خالية من المعنى ؟

ان البرهان على خلو الحساب الصوري من التناقض يجري بطريقتين : الطريقة الاولى وهي ان تقوم بتفسير الرموز فنحصل على نموذج للصيغ الواردة فيه ، وعندئذ نستطيع التثبت من صدق القضايا او كذبها . فمن الامثلة المعروفة هندسة اقليدس التي اذا فسرنا الصيغ فيها على اساس ان هذه الهندسة تصف المكان الفيزياوي ، تصبح قضاياها ذات صلة بالواقع ، ويمكن التثبت من صدقها . ولهذا السبب لم يفكر احد من علماء الرياضيات انه بالامكان الحصول على قضايا متناقضة من مقدماتها الضرورية .

اما الهندسات غير الاقليدية مثل هندسة ريمان ، فان وضوح المسألة غير متوفر ، لذلك فمن الضروري تفسير الصيغ والرموز الواردة

فيها والحصول على نموذج يجب ان يكون بدوره خاليا من التناقض. ومعنى ذلك : ان البرهان على خلو هندسة ريمن من التناقض يحتاج او يعتمد على معرفتنا بخلو النموذج من التناقض . فاذا اخترنا هندسة اقليدس كنموذج للهندسة غير الاقليدية ، وظهر انها خالية من التناقض استنادا على خلو هندسة اقليدس من التناقض فان ذلك بمثابة برهان على خلو هندسة ريمان من التناقض . ولكن في هذه الطريقة محاذير ، وتكون ذات اثر وفاعلية عندما يكون النموذج لا نهائي . وقد استطاع هلبرت ان يبتدع طريقة جديدة هي نظرية البرهان ، حيث نقوم بخطوة اولى نحو عرض الفرع الرياضي على هيئة حساب صوري ، ثم نجعل الرياضيات موضوع بحث من قبل الرياضة الفوقية ، حيث نصوغ قضايا ذات معنى مثال ذلك ان نشير كيف ترتبط الرموز في صيغ ، وكيف يكون بالامكان الحصول على صيغ من صيغ اخرى . ونبين فيما اذا كانت مجموعة من الصيغ مشتقة من صيغ اخرى بمساعدة قواعد الاستنتاج .

وبهذه الطريقة يبرهن هلبرت على استحالة اشتقاق صيغ متناقضة من الحساب الصوري . وبذلك يمكننا الآن صياغة معيار التناقض على الوجه الآتي :

معيار عدم التناقض : يقال ان الحساب الصوري M خالي من التناقض اذا كان من المستحيل اشتقاق الصيغة (ا ∩ ـ ا) من M بمساعدة القواعد الاستنتاجية . وعلى العكس يكون الحساب الصوري متناقضا ، اذا وجدت صيغة واحدة مشتقة على الاقل تناقض صيغة اخرى .

ويشترط في الحساب الصوري للنظرية الفيزياوية كذلك ان يكون خاليا من التناقض ، وقد ادرك هذا الشرط علماء الفيزياء النظرية امثال هيرتز[٣٣] وبولتزمان (١٨٤٤ ـ ١٩٠٦) وبلانك[٣٤] (١٨٥٨ ـ ١٩٤٧) وهلبرت[٣٥] واينشتاين[٣٦] وغيرهم .

واذا ما ظهر تناقض في النظرية الفيزياوية ، فان الضرورة تقتضي ازالة هذا التناقض عن طريق تغيير اختيار البديهيات ، وتبقى مشكلة اخرى مهمة هي ان يكون الاختيار مناسبا ، بحيث تكون جميع القوانين الفيزياوية والمشتقات التي تحتاج الى تثبت تجريبي مشتقة من البديهيات المختارة • ويرى هلبرت ان مسألة خلو اي حقل علمي فيزياوي من التناقض يمكن ان تعتمد على خلو بديهيات علم الحساب من التناقض ، وذلك بان تكون القضايا الحسابية هي نموذج الصيغ الفيزياوية •

اما الخصيصة المنطقية الاخرى التي يجب توفرها في الحساب الصوري هي ان يكون الحساب بسيطا • ولكن ذلك لا يعني ان يكون بسيط الفهم او غير عسير الفهم من قبل الآخرين ، لان مسألة بساطة النظام انما تتعلق باختيار المقدمات او البديهيات والفروض • وافهم ذلك ارى ضرورة تثبيت معيار البساطة اولا •

معيار البساطة : يقال ان الحساب الصوري M بسيط اذا كانت بديهياته او مبادئه اقل عدد ممكن ، بحيث تكون كافية لاشتقاق جميع القضايا او الصيغ الصحيحة المنتمية الى موضوع بحث الحساب•

يرتبط هذا المعيار بطريقة الرد المستخدمة في المنطق والرياضيات، فاذا واجه عالم المنطق او الرياضيات مجموعة من المقدمات وقد تخللتها بعض الفروض الجانبية ، فان خطوته الاولى في اقامة حساب صوري هي محاولة رد بعض المقدمات الى اخرى والاستغناء عن الفروض ان كان ذلك ممكنا ، او محاولة اعادة بناء النظام من جديد بحيث يكتفي بعدد محدود من البديهيات او المقدمات التي تكون كافية لاشتقاق جميع القضايا باستدلال منطقي • فاذا نجح العالم في مسعاه ، فانه عندئذ يفضل الحساب الصوري على النظام المنطقي او الرياضي السالف على اساس ان الاول ابسط في عرضه للقضايا واختيار البديهيات من النظام السالف •

ان تحقيق معيار البساطة في الانظمة الفيزياوية المقامة على الطريقة البديهية معروف كذلك ، وقد اشار اليه عدد من علماء الفيزياء ، واننا لنجد هذا المعيار وقد اصبح ملازما للتفكير الفيزياوي عند بناء الانظمة البديهية • « فالنظرية النسبية مثال رائع للخصيصة الاساسية للتطور الحديث للنظرية ، حيث اصبحت الفرضيات الاولية اكثر تجريدا واكثر بعدا عن الخبرة • لذلك اقترب المرء الى الهدف العلمي الكبير وهو ان يكتفي بأقل عدد من الفرضيات او البديهيات من اجل الحصول على الحد الاقصى من القضايا ذات الصلة المباشرة بالخبرة بواسطة الاستدلال المنطقي »(٣٧) •

اما الخصيصة الاخرى والاخيرة التي نفترضها عند بناء الحساب الصوري هي ان تكون البديهيات في الحساب الصوري كاملة ،بحيث نستطيع اشتقاق جميع القضايا الصادقة او الصيغ الصحيحة منها • وهنا يبرز السؤال من جديد هل يمكن اختيار بديهيات المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية ، بحيث يمكن عن طريقها اشتقاق جميع المبرهنات او القضايا والصيغ المنتمية اليها ؟

قبل الاجابة على هذا السؤال يجدر بنا اولا صياغة معيار الكمال •

معيار الكمال : يقال ان الحساب الصوري M كامل اذا كان بالامكان اشتقاق جميع الصيغ الصحيحة المنتمية الى موضوع بحث الحساب • وعلى العكس يكون الحساب الصوري غير كامل (ناقص) اذا وجدت صيغة صحيحة على الاقل لا يمكن اشتقاقها من الحساب الصوري •

دعنا الآن نفترض نظاما بديهيا لنظرية فيزياوية يتألف من مجموعة بديهيات وقواعد منطقية ، فمن الوجهة المنطقية يجب توفر معيار الخلو من التناقض واستقلال البديهيات فيه • ولما كان الهدف الاساس الذي يسعى اليه عالم الفيزياء من وراء بناء النظام البديهي هو ان يوفر

اشتقاقات ذات صلة بعالم الخبرة ، فان عليه ان يضيف الى النظرية قاموسا Dictionary [٣٨] للرموز المستخدمة فيه او ان يقوم بتفسير الرموز والصيغ لكي يحصل على قضايا مشتقة قابلة للاختبار تجريبيا • وبمعنى آخر : ان يبرهن من خلال النظرية على جميع القوانين باعتبارها مشتقات من المقدمات بواسطة الاستدلال المنطقي • ولكن قدرة النظرية لا تتوقف عند توفير تعليلات للقوانين المعروفة ، بل تبقى مفتوحة لتوفر للباحث اشتقاقات اخرى قد يحصل عن طريقها على قوانين جديدة • وهنا تظهر امكانية العثور على قانون تجريبي او قضية تجريبية واحدة على الاقل تناقض قضية مشتقة من النظرية • فاذا حدث مثل هذا الاحتمال ، كانت النظرية غير كاملة من جهة ، كما توفر تكذيبا لها من جهة اخرى • وفي ضوء ذلك لا بد من احداث تغيير في النظرية لتشمل الحالة الجديدة • ومن الممكن ان نعتبر الحساب الصوري الذي جرى تكذيبه فيزياويا مجرد نظرية رياضية بحتة اذا لم نوفر له نموذجا فيزياويا •

ومن الممكن ان يحصل الباحث على قانون تجريبي معين ، (ويفترض ان يكون قضية مشتقة من نظام بديهي جاهز) ، ولكن النظام لا يوفر استدلالا للقانون التجريبي ، فعندئذ يعتبر النظام ناقصا ، وعلى الباحث تقع مهمة تعديله او تغييره او استبداله بنظام فيزياوي آخر •

وفي ضوء ما تقدم ومن معرفتنا بالمنطق والرياضيات نستطيع صياغة معيار الكمال بشكل آخر :

معيار الكمال : يقال ان الحساب الصوري M كامل ، اذا كانت اضافة صيغة صحيحة غير مشتقة حتى الآن الى الصيغ الاساسية (البديهيات) تؤدي الى تناقض دائما[٣٩] •

لقد اثبت كورت جودل K. Gödel [٤٠] ان الحساب المنطقي في اصول الرياضيات لرسل والذي يحتوي على مفاهيم وادوات

منطقية ، ويفترض فيه ان يعبر عن كل قضايا علم الحساب لا يمكن ان يكون كاملا • وان هذا النقص لا يصيب نظام المنطق لرسل ، بل كل نظام شبيه به مهما اختلفت مقدماته عددا وشـــكلا • وبذلك برهن بشكل قاطع ان هذا النقص هو من محدودية الطريقـــة البديهية • وبعبارة اخرى : ان اية فئة من بديهيات حسابية تتوفر فيها المتانـــة تبقى غير كاملة ، وذلك لوجود قضايا من علم الحساب صادقة لا يمكن البرهان عليها او اشتقاقها من هذه البديهيات • وانه اذا حاولنا معالجة هذه الحالة باضافة هذه القضية او غيرها الى فئة البديهيات ، فـــانه تبقى قضايا اخرى لا يمكن البرهان عليها •

1) Gamow, G., One, Two, Three... Infinity P: 34-35
2) Russell. B., The Principles of Mathemaics P:3
3) Maxwell. J.C., Matter and Motion P:1
4) Black, M., The Nature of Mathematics P:147
5) Einstein, A., Mein Weltbild P:114
6) Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie (1899)
7) Russell, B., & Whitehead, A.N., Principia Mathematica 1. 01, 3. 01 , 4. 01
8) Frege, G., Begriffsschrift §7.
9) Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik P : 73
10) Ibid. P : 85
11) Russell, B., Inroduction to mathematical Philo - sophy P: 18.
(١٢) ياسين خليل : مقدمة في الفلسفة المعاصرة : ص ٥٦ .
13) Russell, B., Introduction P: 19 .
14) Ibid., P: 23
15) Ibid., P: 23
(١٦) الجمهورية ص ١٩٦ ترجمة حنا خباز .
(١٧) تناول هلبرت مسالة التفكير البديهي في المنطق والرياضيات Axiomatisches Denken وفروع الفيزياء في مقالته المشهورة المنشورة سنة ١٩١٨ وتناول اسس الفيزيـــاء في مقالته المعروفـــة Die Grundlagen der Physik المنشورة سنة ١٩٢٤ .
18) Hermes. H., Eine Axiomatiserung der allgemeinen Mechanik. (Leipzig. 1938)
Noll, W., The Foundations of classical Mechanics in the Light of recent advances in Continuum Mechanics.
19) Hertz, H. The Principles of Mechanics.
(٢٠) منطق ارسطو (التحليلات الثانية) ص ٣١٨
20) An. Post. A2. 72b
(٢١) المصدر السابق ص٣١٣
21) Ibid., A2 . 71b
22) Frege, G., Begriffsschrift § 14, § 15, § 16, §18, §19

23) Hilbert, D., & Ackermann, W., Grundzüge der theoretischen Logik. P: 25
24) Russell, B., Introduction to mathematical Philosophy P: 25.
25) Heyting, A., Intuitionism, An Introduction P: 101
26) Hertz, H., The Principles of Mechanics P: 4.

(٢٧) يجب التمييز بين الميتافزيقيا Metaphysics كحقل من حقول الفلسفة يهتم بالعلل الاولى والجواهر وغيرها ، والفيزياء الفوقية Meta-Physics ، حيث قصدنا الفصل بين Meta, Physics لان الثانية تهتم بالتحليل المنطقي والوصفي لعبارات النظريات الفيزياوية بصورة عامة .

28) Carnap, R., The Logical Syntax of Ianguage P:4
29) Bernays, R., Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica (1926).

(٣٠) لقد ادت محاولات افتراض بديهيات تناقض بديهية التوازي على امل الحصول على تناقض في المقدمات ، الى عكس مـــا متوقع ، حيث لم يظهر تناقض ، وبذلك ظهرت هندسات جـــديدة تختلف عـــن هندسة اقليدس في كونها تحتوي كل منها على بديهية تناقض بديهيـــة التوازي ، وعلى مبرهنات تختلف عن البرهنات الاقليدية .

31) Hertz, H., The Principles of Mechanics P:3
32) Hilbert, D., Hilbertiana (Axiomatisches Denken) P: 3-4.
33) Hertz, H., The principles of Mechanics P: 2
34) Planck, M., Vortraege nud Erinnerungen (Positivismus und reale Aussenwelt) P: 232.
35) Hilbert, D., Hilbertiana (Axiomatsches Denken) P: 6.
36) Einstein, A., Mein Weltbild (Zur Methodik der theoretischen Physik) .
37) Einstein, A., Mein Weltbild P:144

(٣٨) استخدم كامبيل هذا الاصطلاح واعتبر القاموس جزءا مهما يرتبط بالنظرية الفيزياوية .

Campbell, N.R., Foundations of Science P: 122

39) Hilbert, D., & Ackermann, W.. Grundzüge der theoretischen Logik P: 35.

40) Gödel, K., über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.

مراجع عامة

Bernays, P., Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica. Math. Z. Bd. 25 (1926).

Black, M., The Nature of Mathematics (London, Routledge & Kegan Paul Third Impression, 1953)

Campbell, N. R. , Foundations of Science (Dover Pulbications, Inc. New York, 1957)

Carnap, R., The Logical Syntax of Language (Landon, Routledge & Kegan Paul, Fourth Impresson 1954).

Einstein, A., Mein Weltbild (Ullstein Bucher, W. Berlin, 1970).

Frege, G., Begriffsschrift (Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildescheim, 1964).

Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik (Trans. in to English. The Foundations of Arithmetic) (Basil Blockwell, Oxford 1953) .

Gamow, G., One Two Three... Infinity (A Mentor Book, 1953).

Gödel Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (I. Monatsh. Phys. 38, 1931).

Hermes, H. Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik (Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten

Wissenschaften, N.F., 3) . Leipzig 1938.

Hertz, H., The Principles of Mechanics (Dover Publications Inc. New York 1956).

Heyting, A., Intuitionism, An Introduction (Studies in Logic, North-Holland Publishing Company, Amesterdam 1956).

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie (Leipzig 1899).

Hilbert, D., Hilbertiana (Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1964 .

Maxwell, J.K., Matter and Motion (Dover Publications Inc. New York, 1952).

Noll. W., The Foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continum mechanics (Procedings of the University of California Berkleley, Dec. 26, 1957, to Jan, 4. 1958).

Planck, M., Vorträge und Erinnerungen (wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1970).

Russell, B., The Principles of Mathematics (London George Allen & Unwin Ltd. 7th Impression, 1956).

Russell, B., & Whitehead, A.N., Principia Mathematica (vol. I, Cambridge, University Press, 1957).

Russell, B., Introduction to mathematical Philosophy (London. George Allen & Unwin Ltd. 9th Impression, 1956).