نظرية جوتلوب فريجه المنطقية

٣

الأفكار الأولية في المنطق

الدكتور ياسين خليل
استاذ المنطق والفلسفة المعاصرة المساعد في
كلية الآداب

مقدمة

يعتمد بناء اللغة الرمزية المنطقية بالدرجة الاولى على البدايات الاولية التي يتخذها الباحث في منهجه ، وهذه البدايات تتأثر من دون شك بطبيعة الدراسة وموقف الدارس معا • ومن هنا يبدأ العمل بدافع فكري او فلسفي معين ، فتختلف الانظمة العلمية والمنطقية باختلاف الفلسفات التي يعتنقها الباحث من اجل القيام بعملية بناء نظامه او نظريته العلمية • ولاجل اقامة بناء مثل هذه الانظمة والنظريات لا بد من وجود بدايات، اذ لا يمكن تشييد البناء من دون وجود اوليات وروابط تقوم بربط الاجزاء في كل متناسق • فالبيت لا يمكن ان يكون حقيقة ماثلة وقائمة طالما هو مجرد تخطيط ورسم ؛ ويصبح البيت واقعا وموجودا عندما نبدأ باختيار المواد الاولية ونربطها بعضها بالبعض الآخر تبعا للخريطة المرسومة والمواصفات المطلوبة • ويصدق الشيء نفسه في مجال بناء الانظمة العلمية والمنطقية ، اذ لابد من اختيار اوليات البناء التي تؤلف بعد ذلك اساس المبادىء والقواعد • واوليات البناء في هذه الانظمة هي الافكار والرموز التي تلعب دورا اساسيا في تشكيل البناء ونوعه وتركيبه ، لانها تؤلف المحور الذي يقوم عليه البحث • وتختلف الانظمة باختلاف الافكار والرموز ، ومصدر الاختلاف هنا لا يقع في مطابقتها او عدم مطابقتها للواقع ، بل ان مصدر الاختلاف يقع على عاتق القائم بعملية البناء • فاذا افترضنا وجود عدد من الباحثين يقومون بعملية بناء انظمة علمية في حقل واحد

متشابه ، وجاءت انظمتهم مختلفة رغم استيفائها قواعد البحث العلمي والمنطقي ، فاننا هنا لا نستطيع البحث عن سبب هذا الاختلاف الا في حدود عملية الاختيار عند الباحثين للافكار والرموز والعلاقات التي اختلفت باختلاف وجهات نظرهم وفرضياتهم وما أملته عليهم خبرتهم العلمية الطويلة • ويرى البرت اينشتاين مثل هذا الرأي لاعتقاده انه بالامكان بناء اسس مختلفة جوهريا دون ان يكون ذلك مصدر اختلاف لها في التطبيق ، وبعبارة اخرى ادق : « من الممكن تكوين اساسين مختلفين جوهريا ، لكنهما يتفقان معا في مطابقتهما للخبرة[1] » •

وعلى هذا الاساس يصبح الاختلاف في بناء الانظمة تابعا لاختلاف الدافع والهدف الذي يسعى اليه الباحث ، اضافة الى وجود مبررات فلسفية ومنطقية ترتبط باختيار الافكار والرموز •

ان وجود الافكار الاولية في الانظمة الفلسفية والمنطقية ضرورة لابد منها ، واذا تصفحنا تاريخ الفلسفة منذ نشأتها لوجدنا الاختلافات قائمة حول طبيعة الافكار الاولية وتحديد مفاهيمها اولا ثم حول النظام الكلي او العام لكل فلسفة ثانيا •

فالفلسفات الميتافيزيقية مثلا وهي أكثر فروع الفلسفة اختلافا وتناقضا تتخذ بعض الافكار مثل الله والانسان والحرية والعلة والارادة وغيرها أفكارا أساسية تحللها تبعا لوجهة نظر معينة وبابعاد مختلفة • ومن ابرز الفلسفات التي اظهرت الفروق بين الافكار الاولية والاخرى المشتقة منها فلسفة سبينوزا[2] في الميتافيزيقا والاخلاق • فوضع هذا الفيلسوف الافكار الاولية في بداية البحث وعرف الافكار التي تحتاج الى التعريف ، واتخذ بعض المبادىء بديهيات او مصادرات يبرهن بواسطتها على كثير من مبادىء الميتافيزيقا والاخلاق •

وعلى العموم تختلف الفلسفات في اتخاذ المقولات وتعريف الافكار بشكل

---

(1) Schillpp, P.A., Albert Einstein. P. 175.

(٢) اختار سبينوزا مثلا في القسم الاول من كتابه « الاخلاق Ethik » بعض الافكار الاولية التي عرفها مثل العلة والجوهر والصفة والله وغير ذلك ، وسطر بعد ذلك بعض البديهيات المهمة وعددها سبع ، ثم بدأ البرهان على القضايا الميتافيزيقية •

يجعل النظام الفلسفي ذو طابع معين يميزه عن بقية الانظمة الفلسفية • وتختلف الانظمة الرياضية باختلاف الافكار والمبادىء ، فمن المعروف في حقل الهندسة ان اقليدس يبدأ بناء علم الهندسة من افكار اولية معينة ومبادىء غير قابلة للبرهان ومبرهنات او مشكلات يبرهن عليها بواسطة المبادىء • ولكن هذا النظام ليس الوحيد في عالم الهندسة ، فالى جانبه توجد هندسة ريمان غير الاقليدسية التي تتخذ افكارا ومبادىء تختلف عن تلك التي اختارها اقليدس لهندسته • وجوهر الاختلاف هنا لا يقع في الطريقة الاستدلالية او البرهانيـــة ، بل يقع في اختيار الافكار والمبادىء وعلى هذا الاساس تختلف هذه الانظمة • وليس هذا هو المثل الوحيد في الرياضيات ، بل توجد امثلة اخرى كثيرة تظهر فيهـــا الاختلافات الى حد التناقض ، ومع هذا فانها تبقى مستوفية للشروط المنطقية والعلمية • فالانظمـة الشكلية او الصورية في المنطق المعاصر تختلف بعضها عن البعض الآخر في الافكار واختيار الاوليات والفلسفة التي تعتمد عليها ، وهذه الاسباب كلها تكون جوهر الاختلاف بين المدارس المنطقية المعاصرة(٣) •

ونحن الآن بصدد بحث الافكار الاولية في منطق جوتلوب فريجه ، وهي الافكار الاساسية في بناء لغته الرمزية المنطقية ، والتي تختلف عن الافكار الاولية في الانظمة المنطقية التي جاءت بعده من حيث اختيار الافكار غير المعرفة والافكار القابلة للتعريف من جهة ، ومن حيث الهدف الذي يسعى اليه فريجه من جهـة أخرى • ومن الجدير بالذكر الاشارة هنـا الى ان فريجـــه كان أول عالم في المنطق والرياضيات استطاع بناء نظام منطقي متكامل تجلت فيه الدقة في اختيار الافكار ، وصياغة البديهيات التي استند اليها في تحقيق هدفه • وسنجد عند فريجه معظم او جميع الافكار المنطقية تقريبا وقد اصبحت الف باء اللغة المنطقية في انظمة مختلفة عن نظامه • وهذا يدل دون شك على اثر فريجة في المنطق المعاصر ، كما انه يشير الى حقيقة اخرى مهمة هي ان تعريفاته للافكار والرموز المنطقية لا زالت

---

(٣) من اهم المدارس المنطقية المعاصرة المختلفة في الفلسفة والاسس التي تستند اليها هي المدرسة المنطقية Logistics ، والمدرسة الشكلية Formalism والمدرسة الحدسية Intuitionism •

باقية من حيث الطريقة ، وان اختلفت عنه تعريفات الاخرين ، لاختلاف اختيار الافكار غير المعرفة • وسنأتي على توضيح هذه الحقيقة في معرض هذا البحث •

- ١ -

بحث فريجه في كتابه « اللغة الرمزية Begriffsschrift موضوع بناء نظرية منطقية قائمة على الاستدلال والبرهان ، واختار لهذه النظرية مفاهيم منطقية معينة لتكون بداية في اقامة البناء المنطقي • وهذه المفاهيم مع غيرها من الروابط المنطقية تؤلف الف باء اللغة الرمزية التي تزودنا بالقدرة على التعبير عن جميع الحقائق المنطقية والقضايا المعروفة في الدراسات الرياضية على السواء • ولقد كان فريجه في تحديده للمفاهيم المنطقية في غاية الدقة وبطريقة تبين لنا عمق معرفته بالاصول الرياضية التي تستند الى اصول منطقية • واللغة الرمزية التي يقدمها لنا فريجه متينة ودقيقة في التعبير عن القضايا رغم صعوبة فهمها اذا ما قورنت بالطريقة المعروفة في الرياضيات ، لان فريجه استخدم طريقة ذات بعدين ، بينما يستعمل علماء المنطق المعاصر طريقة رمزية ذات بعد واحد • وسنحاول الآن مناقشة هذه المفاهيم المنطقية بالطريقة التي عرضها فريجه وحدد معانيها مع مقارنة بسيطة بدراسات منطقية اخرى زيادة في الايضاح وتوسيعا لابعاد البحث • والمفاهيم المنطقية هذه ذات صلة بالمفاهيم الرياضية ، واختارها فريجة بطريقة تخدم غرضه الاساسي الذي من اجله كرس حياته ، وهو اشتقاق الرياضيات من افكار واصول منطقية • لذلك لا بد ان تكون هذه الافكار منطقية في جوهرها لكي تكون ذات قابلية على اشتقاق الافكار الرياضية منها •

أ ـ المتغيرات والثوابت

تتألف اللغة بصورة عامة من رموز او كلمات ترابط فيما بينها بروابط تبعا لقواعد معينة مكونة بذلك تعابير اكثر تعقيدا ، وهذه الرموز او الكلمات تختلف باختلاف مادة البحث ، فمنها ما هو رمز يرتبط بعمليات رياضية بحتة ، ومنها ما هو كلمة تشير الى معنى او مفهوم او دلالة شيئية معينة • ففي لغة التداول

تلعب الكلمات دورا اساسيا في نقل الافكار والمشاعر والخبرات ، ثم يتناقص وجودها كلما ارتفعت المعرفة في سلم الرمزية حتى تصل الى درجة تنعدم فيها الكلمة ويحل محلها الرمز الذي يقوم مقام المعنى المراد • ولكن ذلك لا يعني مطلقا ان لغة التداول خالية من الرموز ، بل اننا كثيرا ما نستعمل الرموز في الحديث عن الاشياء ويتراوح الاستعمال بين الندرة والكثرة حسب مقتضيات الموضوع مدار البحث والمناقشة • ولكننا حينما نتناول النظريات المنطقية والرياضية نجد انفسنا مرغمين على استعمال الرموز بدل الكلمات لتوفر الدقة في التعبير والمعنى • ولقد دأب علماء المنطق على تخليص الرياضيات من الكلمات معتمدين بذلك على الرموز والعلاقات والميكانيكية الرياضية المتوفرة في البرهان لحل المشكلات او البرهنات • وقد تجلت طريقة فريجه الرمزية في تحقيق هذا الشرط بصورة واضحة ، عندما تخلص نهائيا من الكلمات وتحول البرهان الى طريقة ميكانيكية تسير تبعا لمقتضيات الطريقة الاستدلالية[٤] • والرموز التي نستعملها في المنطق والرياضيات ليست ذات طبيعة واحدة او صنف واحد • فمن المعروف في هذه العلوم ان من الرموز ما لا يدل على شيء ، وهي بذلك لا تشير الا الى فراغ او مكان يحل محله رمز له معنى او دلالة او تحل محله كلمة معينة او تعبير لغوي له معنى •

والى جانب هذه الرموز التي ليس لها معنى ثابت والتي تتميز بكونها متغيرة توجد رموز اخرى تدل على اشياء ثابتة او معان محدودة ، وتختلف هذه الرموز عن الاولى انها لا تتغير ، وتبقى ذات معنى واحد ثابت • فالرموز التي لا تدل على معنى ثابت هي المتغيرات Variables ، اما الرموز التي تدل على معنى ثابت فهي الثوابت Contants • وهذا التقسيم معروف في الرياضيات ، وهو معروف كذلك في المنطق منذ ايام ارسطو وان كانت هناك اختلافات في التسمية ، الا ان الاستعمال واحد[٥] • فاذا استعرضنا كتاب التحليلات الاولى نجد ارسطو يستعمل

(٤) انظر القسم الثالث من كتابه « اللغة الرمزية » حول بعض القضايا الرياضية والتعبير عنها بالرموز فقط •

(٥) ان استعمال الثابت والمتغير في المنطق يختلف عنه في الرياضيات من حيث ان الاول اوسع مدى ويضم الاستعمال الشائع في الرياضيات والذي يعتبر الثابت رمزا معينا بينما المتغير رمزا غير معين •

الرموز او الحروف الابجدية مثل أ ، ب ، حـ في التعبير عن اشكال الاقيسة المختلفة في نظرية القياس الحملي وقياس الجهات ، وهذا يدل تماما على ادراك ارسطو لاهمية الرمز باعتباره متغير يمكن الاستعاضة عنه بكلمات ليتحول القياس من صيغة منطقية الى قضية تحتمل الصدق او الكذب • ولم يقتصر استعمال ارسطو للرموز في التعبير عن الاشكال والضروب القياسية ، بل تعدى ذلك حتى شمل نظرية البرهان وعملية ارجاع الاقيسة الناقصة الى الاقيسة الكاملة[٦] •

وتظهر أهمية الرموز في المنطق عند ليبنتز الذي اعتقد ان مشكلات الفلسفة تكون قابلة للحل اذا ما امكن بناء لغة رمزية يكون فيها لكل فكرة رمز ، ولا يمكن ان يكون للرمز اكثر من فكرة[٧] • وعندما نتحدث عن الرموز فاننا لا نقصد المتغيرات فقط ، بل الثوابت كذلك ، ولكن التفرقة والتمييز بين الثابت والمتغير في الرموز يبقى واضحا • ولقد استعمل جورج بول النوعين من الرموز في منطقه واعتبر اللغة نظام مؤلف من رموز مختلفة تقع في ثلاثة اصناف[٨] :ـ

١ ـ حروف ابجدية مثل أ ، ب ، حـ ••• الخ لتشير الى اشياء هي موضوعات تصوراتنا •

٢ ـ رموز للعمليات مثل + ، ـ ، × تقوم بربط تصورات الاشياء مكونة بذلك تصورات جديدة •

٣ ـ رمز الذاتية •

فالحروف الابجدية مثل أ ، ب ، جـ ••• الخ تكون فئة المتغيرات ، بينما تكون فئة رموز العمليات ورمز الذاتية فئة الثوابت في لغة بول المنطقية • ولقد اوضح جوتلوب فريجه الفروق بين الرمز المعين (الثابت) وغير المعين (المتغير) فابتدأ بحثه[٩] متناولا هذه المفاهيم بشكل واضح جدا • يرى فريجه ان الرموز تنحل الى فئتين او نوعين : الفئة الاولى وتضم رموزا غير معينة القيمة او العدد ،

---

(٦) نظرية ارسطو المنطقية ص ١٢٤ للدكتور ياسين خليل •

(٧) المنطق والرياضيات • المجلد العاشر مجلة المجمع العلمي العراقي •

(8) Boole, G., An Investigation of the Laws of Thought. P. 27.

(9) Frege, G., Begriffsschrift. P. 1.

فنستعمل الحروف للتعبير عن القضايا مثال ذلك :ـ

ح (أ + ب) = ح أ + ح ب

اما النوع الثاني او الفئة الثانية فتضم تلك الرموز مثل + ، - ، ∨ ، ١ ، » ... التي تتميز بكونها ذات معنى معين وثابت • ويرى فريجه اهمية استعمال هذا التصنيف في الرموز وتطبيقه في حقل الدراسات المنطقية • ومن هذا يظهر ان الخطوط المنطقية الاولى التي يتخذها فريجه في بناء اللغة الرمزية هي تمييزه بين الرموز الى ما هو ثابت وما هو متغير وتطبيق هذا التصنيف في المنطق • وعلى هذا الاساس ستكون جميع الرموز التي تحتفظ بمعناها دون ان يتغير ثوابت ، بينما تكون جميع الرموز التي لا تدل على معنى ثابت باعتبارها رموزا غير معينة القيمة متغيرات •

ب ـ الحدود والقضايا

تعتبر الحدود اصغر العناصر المنطقية باعتبارها الوحدات التي تؤلف القضايا البسيطة والقضايا المركبة ، فاذا ما حللنا القضية مهما كانت معقدة الى اجزائها فاننا نصل الى وحدات لا تقبل التجزءة ، هذه الوحدات هي ما تعرف بالحدود • ولقد ادرك ارسطو ذلك عند تحليله للغة والقضايا ، فعرف الحد على اساس انه ما تنحل اليه المقدمة[١٠] • والمقدمة عند ارسطو قضية كلية هي اما سالبة او موجبة ، او قضية جزئية هي اما سالبة او موجبة[١١] • ويرتبط الحد بناء على ذلك بتقسيم ارسطو للقضية الى موضوع ومحمول ، لان الموضوع والمحمول تبعا لتعريف الحد حدود تتألف منهما القضية • والموضوع في منطق ارسطو حد يشير الى شيء تحمل عليه صفة او يحمل عليه المحمول ، اما المحمول فهو حد يشير الى صفة تحمل على الشيء او الموضوع ، فاذا قلنا « سقراط انسان » كان الحد الاول « سقراط » موضوعا تحمل عليه صفة انسان ، وكان الحد « انسان » محمولا يحمل على سقراط • ولقد ساد هذا التقسيم الدراسات المنطقيـــة بعد ان اصبح منطق

(١٠) منطق ارسطو (التحليلات الاولى) ص ١٠٧ •

(10) Analytica Priora. A 1, 24 b.

(11) Ibid., A 1, 24 a. (١١) المصدر السابق ص ١٠٤ ـ ١٠٥ •

ارسطو هو الاساس في الدراسات الفلسفية والمنطقية • وفي منطق ارسطو بالذات نجد استعمالا واسعا لهذه الصفة المنطقية مما جعل هذا المنطق مرتبطا بهذا التمييز • فمنطق القياس يعتمد على الحدود في التعبير عن الشكل ، كما ان اختلاف الاشكال القياسية مرتبط باختلاف وضع الموضوع والمحمول في المقدمة الكبرى والصغرى •

وبالرغم من محاولات ليبنتز في بناء منطق جديد يختلف عن منطق ارسطو متأثرا بالدراسات الرياضية ، الا اننا نجد آثار ارسطو واضحة في ابحاثه وذات اثر عميق في اسلوبه • ففي حقل الحدود والقضايا يلتزم ليبنتز بتقسيم ارسطو للقضية الى موضوع ومحمول ، ولكنه يخالفه في تقسيم القضايا ، اذ يرى ليبنتز ان القضايا على نوعين[12] :ـ

١ ـ قضايا تركيبية يكون المحمول فيها منفصلا عن الموضوع ومحمولا عليه ، وهذه القضايا معروفة عند ارسطو في منطقه وهي القضايا الحملية •

٢ ـ قضايا تحليلية يكون المحمول فيها متضمنا في الموضوع ، وهذه القضايا تتميز بكونها صادقة دائما مثال قولنا « الكتب المفيدة مفيدة » •

وتظهر اهمية الحدود في الرياضيات بشكل واضح ، والحدود هنا رموز لا يمكن تحليلها الى ابسط منها ، ترتبط بعلاقات معينة لتكوين صيغ او تراكيب رياضية • وفي الرياضيات لا نجد التمييز الذي نراه في اللغة والمنطق في تحليل القضايا الى موضوع ومحمول ، فالشكل او الصيغة الرياضية تتألف من عدد من المتغيرات والثوابت ، واذا حللنا الصيغة « أ + ب = ب + أ » الى عناصرها الاساسية ، فاننا سرعان ما نضع ايدينا على رموز مثل أ وب تختلف من حيث كونها متغيرات عن رموز اخرى مثل + ، = من حيث كونها ثوابت • وتختلف المتغيرات فيما بينها كذلك ، ففي الصيغة السابقة تسمى أ ، ب متغيرات حدود ، بينما يمكن ان تظهر المتغيرات في منطق القضايا على اساس انها متغيرات قضايا كما هو معروف في الدراسات المنطقية الحديثة • فاذا قلنا « ق ∧ ل ← ل ∧ ق » فاننا بذلك نعين متغيرات هذه الصيغة وهي ق و ل باعتبارها قضايا ، وهذا معناه ان ق و ل متغيرات قضايا •

(12) Saw, R.L., Leibniz. P. 204, P. 206.

وبالنسبة لمنطق فريجه فانه يؤكد على منطق القضايا ولا يهتم بمنطق الحدود ، ولكن ذلك لا يعني مطلقا ان منطق فريجه خال من الحدود ، لان مثل هـــذا القول ينطوي على فهم خاطىء ، خاصة اذا عرفنا ان فريجه عنى اشد العناية بمنطق دالات القضايا ومنطق الفئات ، وهو المنطق الذي يعتمد في التعبير عن حقائقه بواسطة الحدود . ولكن من جهة اخرى نجد ان منطق فريجه خال من التمييز بين الموضوع والمحمول كما هو معروف في الدراســـات المنطقية التي سبقته منذ ايام ارسطو . ويذكر فريجه ذلك صراحة بقوله « ان التمييز بين الموضوع والمحمول للقضية غير موجود في هذا البحث »[١٣] ، ولكن فريجه رغم صراحته في ذلك ، الا انه يحاول ان يجد نوعا من التبرير فيما يشبه هذا التمييز في اللغة الرياضية ، مع فارق بين المفهوم المعتاد للموضوع والمحمول ومفهومه الجديد . ولاجل توضيح هذا الفارق علينا ان نأخذ بعض الامثلة لتحليلها وبيان الموضوع والمحمـــول فيها ، فاذا قلنا :ـ

١ ـ مات سقراط محكوما عليه بشرب السم .

٢ ـ ارسطو معلم الاسكندر الكبير .

٣ ـ ٢ + ٢ = ٤

٤ ـ الهيدروجين اخف وزنا من غاز الكاربون .

فاننا نجد في هذه الامثلة بعض الاختلافات ، ولكننا نستطيع بكل بســـاطة ان نحلل بعضها الى ما هو موضوع وما هو محمول . ولكن فريجه ينظر الى هذه القضايا نظرة جديدة ، فيرى ان هذه القضايا تشترك جميعها في محمول واحد ، وعليه يجب وضع هذه القضايا بالشكل الآتي :ـ

١ ـ ان « موت سقراط محكوما عليه بشرب السم » حقيقة .

٢ ـ ان « تعليم ارسطو للاسكندر الكبير » حقيقة .

٣ـ ان « مجموع العدد ٢ الى العدد ٢ يساوي اربعة » حقيقة .

٤ ـ ان « خفة وزن الهيدروجين عن غاز الكاربون » حقيقة .

وتبعا لهذا التحليل تصبح القضية « موت سقراط محكوما عليه بشـــرب

(13) Frege, G., Begriffsschrift. P. 2.

السم » وبقية القضايا موضوعا ، بينما تمثل العبارة « حقيقة » المحمول المشترك لجميع هذه القضايا او الموضوعات • من هذا يتضح ان كل قضية صادقة يمكن ان تكون موضوعا لمحمول هو « حقيقة » ، وهذا معناه ان مثل هذه اللغة لها محمول واحد فقط لجميع القضايا هو « حقيقة 'ist eine Tatsache' »[١٤] •

وبطبيعة الحال ان مثل هذه اللغة هي التي يعمل فريجه على بنائها في بحثه المنطقي ، ويستخدم رمزا خاصا للتعبير عن هذا المحمول المشترك اشارة الى ان القضية التي تليه صادقة ، وهذا الرمز هو ⊢ ، فاذا واجهتنا قضية او صيغة في منطق فريجه مسبوقة بهذه الاشارة ، فان ذلك معناه ان القضية او الصيغة كذا وكذا ••• صادقة • ومن الجدير بالذكر هنا ان نذكر ان برتراندرسل والفريد نورث وايتهيد في كتابهما اصول الرياضيات يتخذان هذا الرمز في منطقهما لنفس الغرض ، وذلك للاشارة الى صدق الصيغة التي تليه وقد اطلقا عليه اسم رمز التأكيد Assertion-Sign [١٥] •

جـ ـ الصدق والكذب

اختص المنطق منذ ايام ارسطو بنوع معين من العبارات اللغوية والقضايا هي تلك التي تحتمل الصدق او الكذب[١٦] • فالقضية تكون صادقة فيما اذا كان الحكم فيها او المعنى مطابقا لما تشير اليه ، وتكون كاذبة اذا كان الامر خلاف ذلك • فاذا كانت القضية صادقة فهي ليست كاذبة ، واذا كانت كاذبة فهي ليست صادقة ، ولا يمكن ان تكون القضية صادقة وكاذبة في آن واحد •

واصبحت قيمة الصدق والكذب من المفاهيم المنطقية المهمة المرتبطة بالقضايا ، وعرفت القضية بهما ، فهي « اي القضية » عبارة مفيدة تحتمل الصدق او الكذب • ويصدق هذا التعريف على قضايا علم الرياضيات كذلك ، فالقضية الرياضية سواء كانت في حقل التحليل او الهندسة هي اما صادقة او كاذبة • اما المنطق الذي يحدد القضية بهاتين القيمتين فيعرف عادة بالمنطق ذو القيمتين Two Valued Logic

(14) Frege, G., Begriffsschrift. P. 2.
(15) Russell, B., & Whitehead, A.N., Principia Mathematica. P. 8.
(16) De Interpretatione. Chapter 4, 17a

ويمكن التعبير عن ذلك بالشكل الآتي :ـ

ق	ص
صادقة	
كاذبة	ك

ويختلف جدول القيم كلما كانت القضايا المكونة اكثر عددا ، فاذا كان لدينا القضية ق والقضية ل ، فان احتمالات الصدق او الكذب تكون اربعة بالشكل الآتي :ـ

ق	ل
صادقة	صادقة
صادقة	كاذبة
كاذبة	صادقة
كاذبة	كاذبة

ونحن مدينون لفريجه في استخدام هذه الطريقة ، ففي تحديد قيم الروابط المنطقية استعمل جدولا للقيم بالشكل الآتي[17] :ـ

A	قضية موجبة	و B	قضية موجبة
A	قضية موجبة	و B	قضية سالبة
A	قضية سالبة	و B	قضية موجبة
A	قضية سالبة	و B	قضية سالبة

وبالطريقة نفسها يمكن تطبيق الجدول في حالة كون القضايا المؤلفة اكثر من قضيتين ، فاذا افترضناها ثلاث قضايا ، فان الجدول يكون بالشكل الآتي :ـ

ق	ل	م
صادقة	صادقة	صادقة
صادقة	صادقة	كاذبة
صادقة	كاذبة	صادقة

(17) Frege, G., Begriffsschrift. P. 5.

صادقة	كاذبـة	كاذبـة
كاذبـة	صادقة	صادقة
كاذبـة	صادقة	كاذبـة
كاذبـة	كاذبـة	صادقة
كاذبـة	كاذبـة	كاذبـة

واذا كانت قيمة الصدق والكذب للقضايا البسيطة تعتمد على مطابقة المعنى للواقع او عدم مطابقته ، فان فريجه ينظر الى الدلالة للقضايا بصورة عامة على اساس كونها صادقة او كاذبة ، وعلى هذا الاساس تتغاير القضـايا • فاذا افترضنا وجود قضيتين مرتبطتين بالعطف ، فان احتمالات الصدق والكذب تكون اربعـة ، ثم تتحدد قيمة القضية المركبة ذات العطف في اية حالة تكون صادقة وفي اية حالات تكون كاذبة • وبناء على ذلك تكون امثال هذه القضايا متساوية اذا كانت دلالاتها متشابهة • وهذا معناه : ان تكون قيم الصدق والكذب للحالات واحدة ، وسنأتي على تحليل الروابط المنطقية فيما بعد • اما بالنسبة لدالات القضايا وهي الصيغ التي يكون فيها متغير واحد على الاقل ، فاننا لا نستطيع اعطائها قيمة صادقة او كاذبة ، الا في حالة اقران اشياء بالحدود وصفات بالدالة ، فتتحول الصيغة باجمعها الى قضية تحتمل الصدق او الكذب • ولهذه الطريقة اهمية كبيرة في تثبيت معنى الروابط ، خاصة وانها تعني بالما صدق "Extension" دون المفهوم "Intension" ومن المعروف ان الخاصية الاساسية للرياضيات كونها تهتم بالما صدقات • وبذلك نكون قد أبعدنا المنطق عن التفسيرات النفسية التي طالما اشتكى فريجه من وجودها في الابحاث المنطقية •

د ـ الدالة والكلية

الدالة Function من المفاهيم الرياضية والمنطقية المهمـــة ، وهي وان كانت مستعملة في الرياضيات قبل استعمالها في المنطق ، الا ان فريجـــه أدرك علاقتها بمفهوم منطقي هو « الفكرة Begriff » بحيث أصبـح بالامكان تعريف الدالة بالفكرة • ومن هنا ظهر الارتباط الوثيق بين المفهومين • ولقد وجد مفهوم « الدالة » الموسع تطبيقات كثيرة في المنطق وفي القضايا والفئات والعلاقات •

ناقش فريجه مفهوم « الدالة » في بحوث كثيرة ، وكان في كل بحث يضيف تحديدا او صفات جديدة لها . فناقش في بحثه الاول « اللغة الرمزية Begriffsschrift ، هذا المفهوم باعتبار صلته بالقضايا أو بتعبير أدق « بدالات القضايا[١٨] » ثم ناقش الدالة في مقال آخر مهم تحت عنوان « الدالة والفكرة[١٩] » ، حيث بين فيه العلاقة الوثيقة بين هذا المفهوم الرياضي والمفهوم المنطقي . وناقش موضوع الدالة في مقالة اخرى تحت عنوان « ما هي الدالة »[٢٠] . واخيرا ناقش فريجه هذا المفهوم واضعا تحديده النهائي في كتابه الرئيس « القوانين الاساسية لعلم الحساب »[٢١] . ولبيان هذا المفهوم نسوق بعض الامثلة :ـ

١ ـ الهيدروجين اخف وزنا من غاز الكاربون .

٢ ـ سقراط انسان .

٣ ـ عاصمة الجمهورية العراقية .

ففي المثال الاول لدينا قضية تتميز بكونها تحتوي على علاقة هي « اخف من » وبحدين هما « الهيدروجين » و « غاز الكاربون » . ولكننا نستطيع ان ننظر اليهما على اساس انها ذات حد واحد متغير ، فبامكاننا الاستعاضة عن « الهيدروجين » بغاز آخر هو « الاوكسجين » ، بينما يبقى الجزء الثاني « اخف من غاز الكاربون » ثابتا . وعلى هذا الاساس تنقسم القضية الى جزئين : الجزء الثابت والجزء المتغير . ويطلق فريجه اسم الدالة على الجزء الثابت بينما يكون الجزء المتغير حدا لها .

ومن الممكن النظر الى هذه القضية على أساس انها مؤلفة من حدّين هما « الهيدروجين » و « غاز الكاربون » ودالتهما وهي « ... اخف من ... » . وهذا معناه ان الحدين متغيرات و « ... اخف ... » هي الدالة . اما بالنسبة للمثل الثاني فان بامكاننا الاستعاضة عن الحد « سقراط » باسماء اخرى مثل

---

(١٨) لم يستعمل فريجه هذا التعبير في ابحاثه ، ولكننا وجدنا من الانسب استعماله لدقته ، خاصة وانه اصبح من المفاهيم المتداولة في المنطق المعاصر ، وقد استعمله برتراند رسل في ابحاثه المنطقية ويراد به صيغة منطقية فيها متغير واحد على الاقل ، تصبح قضية بعد اعطاء قيم لمتغيراتها .

(19) Funktion und Begriff.
(20) Was ist ein Funktion?
(21) Die Grundgesetze der Arithmetik I.

« أفلاطون » و « احمد » و « رسل » وغيرها ، مع بقاء الجزء الآخر « انسان » ثابت • وبذلك يكون الجزء المتغير من القضية هو الحد والجزء الثابت هو الدالة التي لها حد معين • ويصدق التحليل نفسه بالنسبة للمثل الثالث الذي يتألف بدوره من جزئين : الجزء الثابت وهو « عاصمة » والجزء المتغير وهو « الجمهورية العراقية » •

ومن هذا التحليل نصل الى نتيجة هامة هي : اذا ما وجد في عبارة ما رمز بسيط او مركب في مكان واحد او اكثر ، بحيث نستطيع الاستعاضة عنه برمز او رموز اخرى ، فان الجزء غير المتغير في العبارة يسمى « دالة » ، في حين يسمى الجزء المتغير « حدها » • كما يظهر من التحليل المتقدم ان الدالة وحدها في جميع الحالات ناقصة وغير تامة ، وان الحد يشكل جزء متكاملا معها[٢٢] • ويرى فريجه مثل هذا الرأي في الجزء الاول من كتابه « القوانين الاساسية لعلم الحساب » حيث يقول : ان جوهر الدالة يقع في الجزء من العبارة ، وان الدالة ناقصة وبحاجة الى ما يكملها[٢٣] وبلغة الرموز نترجم ما توصلنا اليه من نتائج بالشكل الآتي :ـ

١ ـ دالة ذات حد واحد $\varnothing(A)$ ، حيث ترمز $\varnothing$ الى الجزء الثابت او الدالة وترمز A الموضوعة بين قوسين الى الجزء المتغير او الحد •

٢ ـ دالة ذات حدين $\varnothing(A,B)$ ، حيث ترمز $\varnothing$ الى الجزء الثابت او الدالة بينما تشير A و B الموضوعة بين قوسين الى الاجزاء المتغيرة او الحدود • ومن الملاحظ هنا وضع A و B في الدالة له اهمية ، وهو الوضع الذي يجعل العلاقة بينهما بشكل معين •

٣ ـ وعندما يريد فريجه تأكيد الدالة ذات الحد الواحد او الحدين فانه يضيف رمز التأكيد ⊢ في مقدمتها مثال ذلك :ـ

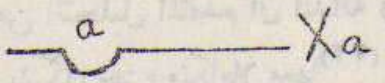
$\vdash \varnothing(A)$ التي تعني : ان A لها الصفة $\varnothing$

$\vdash \varnothing(A,B)$ التي تعني : ان B $\varnothing$ مع A

(22) Frege, G., Funktion, Begriff, Bedeutung. P. 19—20.
(23) Die Grundgesetze der Arithmetik, P. 5.

هذه امثلة بسيطة على الدالات ، ويمكن تحويلها الى قضايا في حالة اقران اشياء بالحدود ، وصفات او علاقات بالدالة ، وعندئذ تكون الصيغة او الدالة قضية تحتمل الصدق او الكذب • ولكن الى جانب هذه الدالات البسيطة توجد دالات اعلى منها مستوى ، وذلك بالنسبة للكلية والجزئية من القضايا مثلا • وسنناقش هنا الكلية فقط مرجئين بحث الجزئية فيما بعد •

الكلية دالة فيها ثابت منطقي يدل على الكل ، ويعبر عنه فريجه رمزيا باحداث فجوة في خط المحتوى • فاذا اردنا القول ان كل a هي X فاننا نعبر عن ذلك بالشكل الآتي :-



وترتبط هذه الصيغة بصيغ اخرى مكونة بذلك صيغا اكثر تعقيدا ، كما انها ممكن ان تكون منفية ، كما يمكن ان تظهر مع صيغ بسيطة واخرى مركبة • ولايضاح هذه الحقيقة نأخذ بعض الامثلة المهمة :-

١ - اذا كانت الكلية منفية ، فان النفي يمكن ان يسبق الفجوة ، او ان يكون بعدها بالشكل الآتي :-

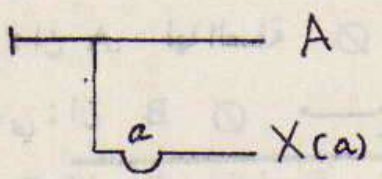
أ -

التي تعني : ان ليس كل a هي X

ب -

التي تعني : ان كل a هي ليست X

٢ - اذا كانت القضية الكلية مرتبطة بقضية بسيطة مثال ذلك :



التي تعني : كل a اذا a هي X فان A

٣ ـ اذا كانت الكلية مرتبطة بقضية كلية مثال ذلك :ـ

التي تعني : ان كل a وكل e اذا e, a هي X فان a هي A .

٤ ـ ويمكن ان ترتبط الكلية باكثر من قضيتين مكونة بذلك قضية مركبة . ولهذا الثابت المنطقي الدور المهم في منطق الدالات (دالات القضايا) ، كما انه الثابت الوحيد غير المعرف في هذا المنطق ، لان فريجه يعرف الجزئية او ثابت (واحد على الاقل) بواسطة النفي والكلية . وهذا معناه ان الكلية رمز غير معرف في منطق فريجه ، وان الجزئية ثابت او رمز يعرف في حدود الرموز غير المعرفة في منطق فريجه .

هـ ـ الذاتيـــة

ناقش فريجه الذاتية Inhaltsgleichheit في امكنة متعددة من بحوثه المنطقية . ففي بحثه الاول « اللغة الرمزية »[٢٤] ناقش هـذا المفهوم محددا دوره المنطقي ، ثم تناوله بالبحث في مقالته المشهورة « حول المعنى والدلالة »[٢٥] ، كما نجـد اهتمامه في هذا المفهوم المنطقي في تزايد في مقالات اخرى . ولكن المهم لدينـا هنا هو الكيفية التي فهم بها فريجه هذا المفهوم بصورة عامة . فبالنسبة له تعتبر الذاتية علاقة بين الاسماء وتختلف عن الالزام والنفي لكون الثانية (اعني الالزام والنفي) تتعلق بالمحتوى باعتبارها رموزا لمحتوى معين[٢٦] . ويمكن ان تـكون الذاتية بين اسمين متشابهين في المعنى والدلالة ، او بين اسمين متساويين في الدلالة فقط .

فبالنسبة للحالة الاولى تكون أ = أ

(24) Frege, G., Begriffsschrift. P. 13—15.

(25) Freg, G., Funktion, Begriff, Bedeutung [über Sinn Bedeutung] P. 38.

(26) Frege, G., Begriffsschrift. P. 13.

اما بالنسبة للحالة الثانية فان الذاتية تكون على صيغة أ = ب

يختار فريجه الحالة الثانية لاعتبارات منطقية اهمها اننا نستطيع استخدام هذه الحالة الذاتية في البرهان والاشتقاق ، كما انها من دون شك تخبرنا عن شيئين مختلفين اسما ، متفقين في الدلالة • ويعبر فريجه باسلوبه المنطقي عن الذاتية بالصيغة الآتية $A \equiv B \vdash$ حيث يشير الرمز $\vdash$ الى صدق الصيغة التي تليه ، وهي ان الاسم A هو B • وبعبارة ادق : ان دلالة B هي دلالة A

-٢-
الروابط المنطقية

يستعمل الانسان في حياته اليومية عند المحادثة مع الآخرين تعابير لغوية مختلفة ، وهذه التعابير لا يمكن ان تؤدي الغرض اذا بقيت متفرقة ومنفصلة لا يربط بينها رابط ، لذلك لابد من روابط تؤلف فيما بين التعابير وحدة فكرية ولغوية • فتقوم هذه الروابط بشد الجمل والقضايا مكونة بذلك تراكيب اكثر تعقيدا • وتتميز هذه الروابط اضافة الى عملها الوظيفي في اللغة انها تحدد معنى العبارة بشكل لها دلالة منطقية معينة • ولا يهمنا هنا ما تقوم به هذه الروابط من عمل لغوي ، لان ذلك من اختصاص علم اللغة ، لذلك سيكون البحث منصبا على تلك الروابط التي لها دلالات منطقية معينة • وهذا معناه : اننا سوف لا نتناول بالبحث جميع الروابط المعروفة في اللغة ، بل نهتم بجزء منها له علاقة بالدراسات المنطقية والرياضية • ولقد أدرك فريجه هذا الهدف ، فتناول الروابط المنطقية بالبحث محددا بذلك دلالاتها المنطقية ، لتكون قاعدة اساسية في لغته الرمزية ، باعتبارها تؤلف مع المفاهيم الاخرى الف باء اللغة المنطقية عنده • وبهذا العمل يكون فريجه قد انتقل من مستوى لغة التداول الى مستوى جديد بعد تحليله للروابط في اللغة ، هذا المستوى الذي ينقل الباحث من غموض اللغة الى لغة دقيقة تعتمد على الرمزية في التعبير • واذا كان دور الروابط في اللغة مهما الى الحد الذي تقوم به في تكوين وحدة فكرية ولغوية ، فان دور الروابط المنطقية لا يقل اهمية ، لانها تقوم بربط القضايا والصيغ المنطقية بشكل يخدم اغراض المنطق المتعددة •

أ ـ الافكار المعرفة وغير المعرفة

اذا كانت بعض الافكار المعينة هي الف باء النظام المنطقي ، والتي بواسطتها يتم البناء تبعا لقواعد منطقية معينـــة ، فان هذه الافكار اما ان تكون لا معرفات "Indefinables" او ان يكون بعضها معرف والآخر غير معرف • فاذا افترضنا وجود عدد معين من هذه الافكار واردنا تعريفها ، فاننا نضطر الى استعمال افكار في التعريف ، وهـــذه الافكار اما ان تكون قد عرفت سابقا او ان تكون غير قابلة للتعريف • فاذا كانت معرّفة ، فان ذلك معناه : ان هذه الافكار اســـتخدمت افكارا اخرى في التعريف لتحديد معناها • واذا واصلنا الدور ، فاننا سوف لا ننتهي الى نقطة نبدأ منها وسنبقى في سلسلة لا متناهية او في حلقة مفرغة • لذلك من الضروري ان يبدأ النظام المنطقي من افكار هي لا معرفات نحتاجها في تعريف افكار اخرى • وهنا يجب التمييز بين الافكار المنطقية على اساس كونها :

١ ـ افكار غير معرفة • ٢ ـ افكار معرفة •

وتختلف الانظمة المنطقية باختلاف هذه الافكار ، فليس ضروريا أن تكون الافكار غير المعرفة في النظام المنطقي (M) مثلا هي نفســـها في النظام المنطقي (N) ، وذلك لان لعالم المنطق الحق في اختيار الافكار غير المعرفة التي تناسب نظامه والتي توصله الى الاهداف التي ينشدها • فالافكار المعرفة في النظام (M) يمكن ان تكون افكارا غير معرفة في النظام (N) ، وكذلك الامر بالنسبة الى الافكار غير المعرفة في (M) والتي يمكن ان تكون معرفة في (N) • كل ذلك يتوقف على اختيار العالم المنطقي للافكار التي يريدها على اساس انها معرفات او غير معرفات • وفي هذه الحدود نحتاج الى التعريف لكي نخضع بعض الافكار الى افكار اخرى ، ولا يكون ذلك الا بتحديد شروط معينة لابد للتعريف من ان يستوفيها •

ولابد هنا من الاشارة الى حقيقة منطقية وفلســـــفية مهمة تتعلق بالافكار والتعريف • ولتوضيح هذه الحقيقة نضرب مثلا مناسبا من نظرية ارسطو المنطقية• فنظرية ارسطو مثلا تحتوي على افكار منطقية تحتاج الى تحديد مثل الحد والمقدمة والقياس والقضية وغيرها ، اضف الى ذلك ضرورة تحديد معاني الثوابت المنطقية

الاربعة وهي [O, I, E, A] ، الكلية الموجبة والكلية السالبة والجزئية الموجبة والجزئية السالبة . فالافكار الاولية غير الثوابت المنطقية تحتاج الى تعريف لتحديد معناها ودورها ، ويتميز هذا التعريف بكونه مجرد ايضاح للفكرة لا يختلف عن التعريف القاموسي . اما الثوابت المنطقية ، فبالامكان اختيار ثابتين منهما باعتبارهما أفكارا غير معرفة تعرف بواسطتها بقية الثوابت المنطقية مستخدمين لذلك النفي . وهذا التمييز يقودنا الى ضرورة التفريق بين التعريفات تبعا لطبيعتها وادوارها المنطقية ، ولايضاح ذلك نقسمها الى نوعين :-

١ - التعريفات التي تحدد دور الافكار ومعناها دون الالتزام بالشرط المنطقي في تعريف الافكار بمفاهيم او رموز معرفة او غير معرفة . ولا تدخل مثل هذه التعريفات في صلب النظام المنطقي ولا يكون لها دور في الاستدلالات[٢٧] .

٢ - التعريفات التي تحدد دور الافكار ومعناها مع الالتزام بالشرط المنطقي في تعريف الافكار برموز غير معرفة او بافكار سبق تعريفها . ويتميز هذا النوع من التعريفات انه يدخل كعنصر مهم في النظام المنطقي والاستدلالات البرهانية .

وطريقة فريجه لا تختلف من حيث الجوهر عن هذه النظرية ، فهو يحدد لنا معنى القضية والصدق والكذب والدلالة والفكرة وبعض الرموز وغيرها دون ان يجعل لتعريفاتها دورا مباشرا في الاستدلال ، بينما هو يختار أفكارا أخرى من بين الروابط المنطقية متخذا اياها لا معرفات يعرف بواسطتها روابط منطقية أخرى . اختار فريجه من بين الروابط المنطقية النفي والالزام كافكار غير معرفة ، وقد عرف بواسطتها بقية الروابط المنطقية مثل البدل بنوعيه المتصل والمنفصل ، والعطف ورابطة « لكن » وغيرها ، وسنأتي على بحثها تفصيلا .

---

(٢٧) من الامثلة على هذه التعريفات تحديد معنى الرموز مثال قولنا « ان A ثابت منطقي يدل على الكلية الموجبة » وهذا النوع من التعريفات هو ما يسمى عادة بالتعريفات الفوقية Meta Definitions انظر كتابي « نظرية ارسطو المنطقية » - الفصل الرابع .

ب ـ النفي والالزام

يستخدم فريجه « النفي » في نظريته الرمزية المنطقية على هيئة خط عمودي صغير على خط المحتوى مثال ذلك $\vdash\!\!\neg A$ ، وللنفي خصائص منطقية مهمة ، فاذا كانت القضية A صادقة ، فان النفي يقلب قيمتها الى كاذبة ، اما اذا كانت A كاذبة ، فان النفي يقلبها قضية صادقة • ومن الضروري ان نميز هنا في لغة فريجه المنطقية بين رمزين مختلفين هما :ـ

$\neg A$ ، $\vdash A$ ، حيث يشير الرمز الاول الى تصور هو ان A غير قائمة "Statt finde" ، دونما القول فيما اذا كان هذا التصور صادقا ام لا • اما في الرمز الثاني ، فان الحالة تختلف ، حيث يشير الرمز الى محتوى صادق •

ويربط فريجه في نظريته الرمزية النفي في عبارات معقدة ومختلفة ، وسنجد بعض هذه الاستخدامات بعد عرض بسيط لرابطة الشرطية او الالزام •

اذا افترضنا قضيتان هما A ، B في حالة الشرطية او الالزام ، فان علينا ان نميز اولا في تحديد خصائص الالزام اربعة احتمالات ، حيث يتحدد معنى الالزام تبعا لهما ؟ وهذا الجدول هو :ـ

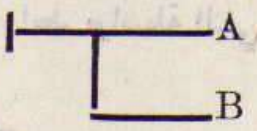
اذا كانت كل من A ، B صادقة

اذا كانت A صادقة و B كاذبة

اذا كانت A كاذبة و B صادقة

اذا كانت كل من A ، B كاذبة

ويعبر فريجه عن الالزام بالصيغة الآتية :ـ



وتقرأ : اذا كانت B فان A • او بتعبير آخر : ان B يلزم عنها A • ويحدد فريجه الخصيصة المنطقية للالزام بقوله : ان الاحتمال الثالث

من الاحتمالات الاربعة غير ممكن [غير قائم][٢٨] • وبتعبير آخر : انه لا يمكن ان تكون القضية A كاذبة اذا كانت B صادقة • اما الحالات الاخرى فانها ممكنة وهي :ـ

اذا كانت القضية B صادقة فان A صادقة

اذا كانت القضية B كاذبة فان A صادقة

اذا كانت القضية B كاذبة فان A كاذبة •

ولاجل توضيح الشرطية بالنسبة للاحتمالات الثلاثة القائمة نأخذ بعض الامثلة :ـ

١ ـ اذا كانت A صادقة فان القضية B تكون اما صادقة او كاذبة

اذا كانت « ٢ × ٣ = ٦ » فان « ٦ ÷ ٢ = ٣ » B صادقة و A صادقة] •

اذا كانت « ـ ٢ = ٢ » فان « (ـ ٢)^{٢} = (٢^{٢}) » [B كاذبة و A صادقة] •

٢ ـ اذا كانت B كاذبة فان القضية A تكون اما صادقة او كاذبة •

ولما كان احد هذين الاحتمالين موجودا في الفقرة الاولى ، وهو عندما تكون القضية B كاذبة و A صادقة ، فان واجبنا الآن تقديم مثل على الاحتمال الآخر وهو ، عندما تكون القضية B كاذبة والقضية A كاذبة كذلك •

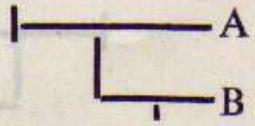
اذا كان « سقراط بطلا مسيحيا » فانه « فارس من العصر الوسيط » • ويربط فريجه النفي بالالزام حاصلا بذلك على رموز ذات دلالات أو قيم صدق جديدة • ولهذا الربط اهمية كبيرة في تعريف الروابط المنطقية الاخرى • لذلك ننتقل الآن الى تعريف هذه الروابط بواسطة النفي والالزام •

جـ ـ البدل المتصل والمنفصل

يميز فريجه بين نوعين من البدل اصطلحنا على تسميتهما بالبدل المتصل والبدل

(28) Frege, G., Begriffsschrift. P. 5.

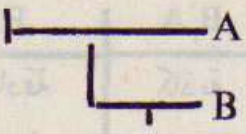
المنفصل ، وقد استخدم لأجل تحديدها النفي والالزام فقط • كما اقترح طريقة لهذا التحديد مبنية على جدول القيم والاحتمالات الاربعة التي سبق وان ذكرناها • فالصيغة الآتية :ـ



تبين ان القضية B منفية يلزم عنها القضية A • ولاجل تحديد معنى هذه الصيغة نقول : ان الحالة التي تكون فيها القضية A كاذبة ونفي القضية B الموجبة غير واجبة » وبتعبير آخر ان A ، B لا يمكن ان تكونان كاذبتين معا »[٢٩] • وعلى هذا الاساس تبقى لدينا ثلاث حالات تكون الصيغة فيها واجبة وهي :ـ

في حالة كون القضية A موجبة (صادقة) والقضية B صادقة
في حالة كون القضية A صادقة والقضية B كاذبة
في حالة كون القضية A كاذبة والقضية B كاذبة

هذا النوع من البدل هو ما نطلق عليه اسم « البدل المتصل » وذلك لاحتمال اجتماع الصدق في القضية A والقضية B معا • وتستخدم الكلمة " oder " بالالمانية او بالانكليزية كلمة " or " للتعبير عن هذه الحالة • وعلى هذا الاساس يحدد فريجه البدل المتصل بالصيغة الرمزية السابقة التي استخدم فيها النفي والالزام • ويمكننا الآن وضع هذا التحديد بالطريقة الرمزية المتداولة في كتب المنطق الحديثة وهي :ـ

ان الصيغة  تعني ان القضية B مسبوقة بالنفي

ويلزم عن القضية ذات النفي القضية الموجبة A ، وبالتعبير الرمزي الحديث تكون هذه الصيغة بالشكل الآتي ¬B←A ¬ ، حيث يشير الرمز ¬ الى النفي ويشير السهم (←) الى الالزام • واذا اردنا اختيار رمز للبدل

(29) Ibid., P. 11.

المتصل ، فان الصيغة السابقة تكون تعريفا له كما هو معروف في كتب المنطق ، فنحصل على الصيغة المنطقية الآتية : $A \leftarrow B \quad ، = B \vee A$

اما بالنسبة للبدل المنفصل فان فريجه اختار صيغة اخرى للتعبير عنه وهي :ـ

ويمكن قراءتها بالشكل الآتي :ـ ان هذه القضية غير واجبة في حالة كون القضية B صادقة ونفي القضية A المنفية ، وبتعبير آخر : ان حالة كون القضية A موجبة والقضية B موجبة غير قائمة . او بكلمة ثالثة : « ان القضية A و B تطرح احداهما الاخرى »[٣٠] . ولتوضيح هذا القول يجدر بنا الاستعانة بجدول القيم لمعرفة الحالة الواردة في هذا التحديد . وفي حالتنا هذه يبقى لدينا :ـ

حالة كون القضية A صادقة والقضية B كاذبة

حالة كون القضية A كاذبة والقضية B صادقة

حالة كون القضية A كذبة والقضية B كاذبة .

من هذا يتضح ان حالة كون القضية صادقة والقضية B صادقة غير ممكن . لهذا السبب اصطلحنا على تسمية هذا البدل بالبدل المنفصل . واذا اردنا الدقة اكثر في مقارنة جدول القيم لهذا النوع من البدل باحد جداول القيم لروابط منطقية معروفة في المنطق المعاصر ، فاننا نجد تشابها بينه وبين جدول القيم لخط شيفر[٣١] . ويمكن ملاحظة ذلك بالشكل الآتي :ـ

A	B	B A
صادقة	صادقة	كاذبة
صادقة	كاذبة	صادقة
كاذبة	صادقة	صادقة
كاذبة	كاذبة	صادقة

(30) Ibid., 16.

(31) Hermes, H., Einführung in die mathematische Logik. P. 25

ويمكن وضع صيغة فريجه للبدل المنفصل بالطريقة الرمزية الحديثة وهي :-

$$A \neg \leftarrow B$$

ويمكننا ربط هذه الصيغة بخط شيفر بالوضع الآتي (٣٢) :-

$$A \neg \leftarrow B = B \mid A$$

واخيرا يمكننا تقديم رابطة اخرى تدل على البدل تختلف عن البدل المتصل والبدل المنفصل . ولكن لما كانت هذه الرابطة بحاجة الى تعريف العطف ، لذلك سنقوم بتعريفها بعد تعريف رابطة العطف .

د ـ العطف والانعطاف

يتبع فريجه الطريقة نفسها في التعبير عن رابطة العطف مستخدما لذلك طريقته الرمزية ، ويعبر عن رابطة العطف بالصيغة الآتية :-

فاذا كانت القضية B مرتبطة برابطة العطف مع A ، فان الصيغة الآنفة الذكر هي تحديد لها ، ويمكن قراءتها بالشكل الآتي :- القضية A والقضية B صادقتان (٣٣) . وهذا معناه ان هذه الصيغة تستبعد من الاحتمالات الاربعة الاحتمال الثاني والثالث والرابع ولا يبقى غير الاحتمال الاول قائم . وبعبارة ثانية : ان هذه الصيغة تكون صادقة في حالة واحدة هي اذا صدقت كل من A و B معا ، وكاذبة في جميع الحالات الأخرى . ويمكننا وضع هذا التحديد للعطف بالطريقة المنطقية الحديثة باستعمال رموز للنفي والالزام بالشكل الآتي :-

$$(A \neg \leftarrow B) \neg$$

---

(٣٢) اختار شيفر طريقة جديدة لتعريف الروابط المنطقية خلافا للطرق المعروفة ، فقد اختار رمزا واحدا لتعريف جميع الروابط ومنها النفي كذلك ، بينما نجد فريجه اختار رمزين لتحديد بقية الروابط ، واختار رسل النفي والبدل لتعريف الروابط المنطقية .

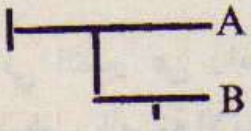
(33) Frege, G., Begiffsschrift. P. 12.

وفي الحقيقة ان هذه الصيغة مساوية او تعريفا للعطف كما هو معروف في كتب المنطق ، وعلى هذا الاساس يمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المنطقية بالشكل الآتي :ـ

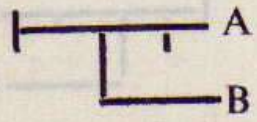
$$\neg (A \leftarrow B) \neg = B \wedge A$$

حيث يشير الرمز ٨ الى العطف .

ويعرف فريجه رابطة اخرى مستعينا بالصيغة التي استخدمها في تحديد البدل المتصل والبدل المنفصل . ففي الحالة الاولى (حالة البدل المتصل) لدينا الصيغة الآتية :ـ



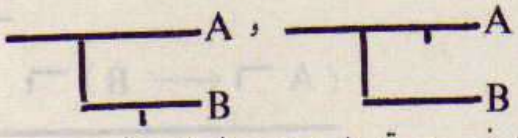
وفي الحالة الثانية (حالة البدل المنفصل) لدينا الصيغة الآتية :ـ



فبالنسبة للاولى نجد ان الاحتمال الرابع من الاحتمالات الاربعة غير قائم : وهو عندما تكون القضية A ، B كاذبتان معا . اما بالنسبة للحالة الثانية فان الاحتمال الاول غير قائم ، وهو عند ما تكون القضية A ، B صادقتان . وعلى هذا الاساس تحدد هذه الرابطة بالشكل الآتي :ـ

اذا اصطلحنا على تسمية هذا النوع من البدل « بالبدل المطلق » والذي يعبر عنه بالالمانية entweder—oder [٣٤] وبالانكليزية "neither — nor" ورمزنا له بما نرمز للبدل المتصل مع اضافة نقطة فوقه ، فان التحديد يكون :ـ

$B \dot{\vee} A$ تعني



وبهذه الطريقة يكون فريجه قد استخدم العطف في تعريف البدل المطلق ، ويمكننا التعبير عن الصيغة المنطقية لتعريف البدل المطلق بالطريقة الرمزية الآتية :ـ

$$(A \leftarrow B \neg) \wedge (A \neg \leftarrow B)$$

(34) Ibid., P. 11

وباستخدام رمز البدل المطلق والمساواة في التعبير عن الحد المعرف والحد المعرف تكون الصيغة بالشكل الآتي :ـ

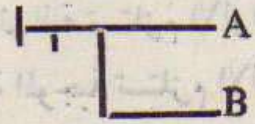
$$(A \leftarrow B) \wedge (A \leftarrow \neg B) = B \vee A$$

وبناءً على ما تقدم ذكره من تحليل يكون البدل المطلق صادقا في حالتين هما :ـ

عندما تكون القضية B والقضية A مختلفتان من حيث القيمة ، وذلك في حالة كون A صادقة و B كاذبة وبالعكس ، اي في حالة A كاذبة و B صادقة ، اما في الحالات الاخرى فتكون الصيغة كاذبة .

ومن الضروري ان نذكر هنا الى ان فريجه لم يستخدم رموزا خاصة بالبدل المتصل والمنفصل والمطلق والعطف ، بل اكتفى بالتعبير عن معانيها بالنفي والالزام مستخدما طريقته الرمزية ، اما الصيغ التي وضعناها على هيئة مساواة او تعريف ، فانها تعابير منطقية على ضوء المنطق الحديث ورموزه الرياضية المعروفة .

ومن الروابط التي يذكرها فريجه كذلك رابطة الانعطاف (aber) أو (but) . وهذه الرابطة وان كانت تشبه رابطة العطف في استعمالاتها اللغوية الا اننا يجب ن نلاحظ استعمالاتها الاخرى . فالشخص يستعمل رابطة الانعطاف عندما يريد تغيير وجهته ، وذلك اذا كانت A كاذبة فان B صادقة . ويعبر فريجه عن هذه الحالة بالشكل الآتي :ـ

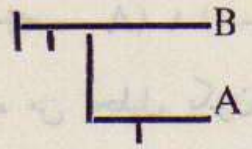


التي يمكن ترجمتها : ان B ونفي A حالة قائمة . ويستبعد في هذه الصيغة من الحالات الاربعة جميع الاحتمالات ما عدا الاحتمال الثالث وهو عندما تكون A كاذبة و B صادقة .

ويضيف فريجه الى هذه الروابط رابطة مهمة أخرى هي « التنافي »

(35) Ibid., P. 13.

(Weder-noch) أو (Neither - nor) ، ويعبر فريجه عنها بالصيغة الآتية :ـ

(36) 

التي يمكن ترجمتها : ان كون A و B منفيتان حالة قائمة • وبعبارة أخرى ان هذه الرابطة تستبعد جميع الاحتمالات ما عدا الاحتمال الاخير وهو كون القضية A والقضية B كاذبة معا •

هـ ـ تطبيقات منطقية : المربع المنطقي

لقد اتضح الآن بعد مناقشة المفاهيم المنطقية والروابط ان لغة فريجه الرمزية تتألف من عدد ثابت من الافكار الاولية التي بواسطتها نستطيع التعبير عن الحقائق المنطقية ، اضف الى ذلك ان طريقته الرمزية قادرة كذلك في التعبير عن شتى الصور المنطقية • ولاجل بيان دور هذه الافكار والروابط في التعبير نتخذ من المربع المنطقي عند ارسطو اساسا منطقيا ، وذلك لمعرفة قابلية الطريقة الرمزية لفريجه على صياغته • ولقد تناول فريجه المربع المنطقي في كتابه « اللغة الرمزية »[٣٧] ، لبيان قدرة طريقته الرمزية في التعبير عن قضايا فيها الكلية والنفي • وفي هذا المربع تتضح حقائق منطقية مهمة هي :ـ

(١) ان القضية الكلية الموجبة تستلزم الالزام والكلية •
(٢) ان القضية الكلية السالبة تستلزم الالزام والنفي والكلية •
(٣) ان القضية الجزئية الموجبة تستلزم الالزام والنفي والكلية •
(٤) ان القضية الجزئية السالبة تستلزم الالزام والنفي والكلية •

وهذه الحقائق تبين انه بالامكان تعريف الجزئية السالبة والموجبة بواسطة النفي والكلية باعتبارهما من المفاهيم غير المعرفة • وبعبارة ادق نجد ان فريجه لا يستحدث رمزا للجزئية ، بل يكتفي بالتعبير عنها بواسطة النفي والكلية •

---

(36) Ibid., P., 13.
(37) Frege, G., Begriffsschrift. P. 24.

من المعروف ان نظرية ارسطو في المربع المنطقي[٣٨] تتألف من اربع قضايا اساسية تتصل فيما بينها بعلاقات وروابط ، وهذه القضايا هي :ـ

(١) الكلية الموجبة ويعبر عنها بالرمز أ A ب

(٢) الكلية السالبة ويعبر عنها بالرمز أ E ب

(٣) الجزئية الموجبة ويعبر عنها بالرمز أ I ب

(٤) الجزئية السالبة ويعبر عنها بالرمز أ O ب

ولكي يكون الامر اكثر وضوحا نسوق بعض الامثلة على هذه القضايا :ـ

أ A ب : كل عراقي اسيوي

أ E ب : لا واحد من العراقيين افريقي [كل العراقيين ليسو افريقيين]

أ I ب : بعض العراقيين اكرادا •

أ O ب : بعض العراقيين ليسوا عربا

ان هذه القضايا تبعا لمنطق ارسطو تتألف من ثابت منطقي ومن موضوع ومحمول ، اما بالنسبة لمنطق فريجه فاننا سننظر الى القضايا الاربعة الآنفة الذكر من زاوية اخرى تظهر فيها الحدود فئات "Classes" فالكلمة « عراقي » هي صفة تحمل على عدد من الافراد ، كما ان الكلمة « اسيوي » تعبر عن صفة ينضوي تحتها عدد كبير من الافراد • وعلى هذا الاساس تتحول هذه القضايا على النحو الآتي :ـ

١ ـ كل عراقي آسيوي ـ كل a اذا كان a عراقي فان a آسيوي

واذا رمزنا الى الصفة عراقي بالرمز X والى الصفة آسيوي P نكون قد حصلنا على الصيغة الآتية :ـ

كل a اذا Xa فان Pa

٢ ـ لاواحد من العراقيين افريقي [كل عراقي ليس افريقي] = كل a اذا كان a عراقي فان a ليس افريقي • او بتعبير ادق ، كل a

(٣٨) ياسين خليل ، نظرية ارسطو المنطقية ـ الفصل الخامس •

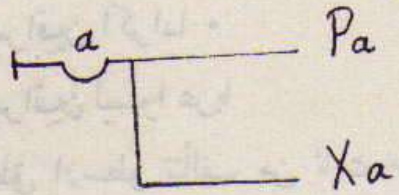
اذا Xa فان ليس Pa

٣ – بعض العراقيين اكراد = بعض a اذا كان a عراقيين فان a اكراد • وبتعبير آخر : بعض a اذا Xa فان Pa

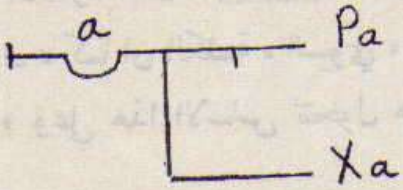
٤ – بعض العراقيين ليسوا عرب = بعض a اذا كان a عراقيين فان a ليسوا عرب او بتعبير ثان : بعض a اذا Xa فان ليس Pa •

وباستخدام النفي والالزام والكلية وطريقة فريجه الرمزية تتحول هـذه الصيغ الاخيرة على النحو الآتي :–

كل a اذا Xa فان Pa



كل a اذا Xa فانليس Pa



اما بالنسبة للقضايا الجزئية فنحن نعرف ان فريجه لم يستخدم للجزئيـة رمز معين ، لانه استعاض عنها بالكلية والنفي ، ولاجل ايضاح ذلك نستخدم اولا تعريف الجزئية تبعا لنظرية ارسطو المنطقية :

فاذا رمزنا للكية بالرمز (x) وتعنى كل x وللجزئيـة (∃x) وللمحمول بالرمز H ، فان الجزئية الموجبـة تعرف بواسـطة النفي والكلية بالطريقة الآتية :–

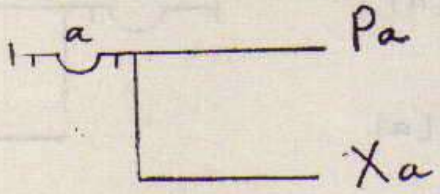
$$(\exists x)\, Hx = \neg\, [(x) \neg\, Hx]$$

$$(\exists x) \neg\, Hx = \neg [(x)\, Hx]$$

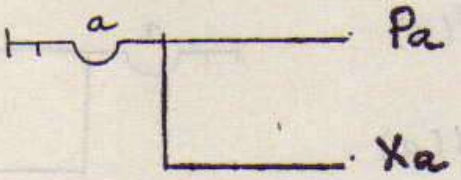
ولتوضيح هذه الحقائق المنطقية نستعين بالامثلة اللغوية :ـ

١ ـ بعض العرب افارقة (جزئية موجبة) = ليس [كل العرب ليسوا افارقة]
واذا نظرنا الى الحد الثاني فاننا نجد فيه النفي الاول ثم النفي الثاني داخل القوس ، ومن المعروف ان نفي الكلية يساوي جزئية ، فنحصل أولا على « بعض العرب » ، ومن نفي النفي الثاني الذي يتحول الى ايجاب نحصل على « افارقة » ، فيكون لدينا « بعض العرب افارقة » وهذا هو الحد الاول .

٢ ـ بعض العرب ليسوا افارقة (جزئية سالبة) = ليس [كل العرب افارقة]
واذا رفعنا القوس تكون لدينا القضية بعض العرب ليسوا أفارقة وهي الحد الاول وذلك لان نفي الكلية يساوي جزئية وان النفي واقع كذلك على الافارقة .
وباستخدام طريقة فريجه المنطقية تتحول هذه القضايا بالشكل الآتي :ـ

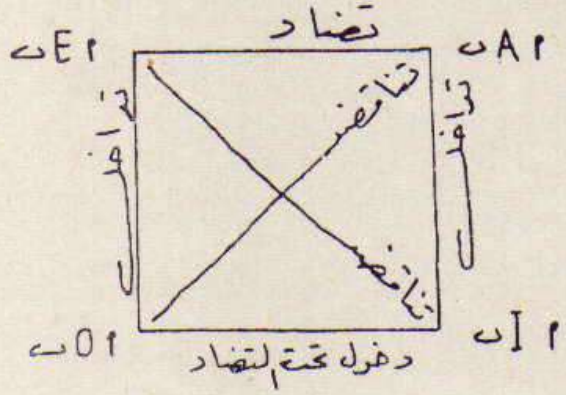


الجزئية الموجبة



الجزئية السالبة

واذا كان المربع المنطقي لارسطو يجمع القضايا الاربع في علاقات معينة على النحو الآتي ، فان مربع فريجه لا يختلف عنه اللهم الا من حيث شكل الصيغ المنطقية :



حيث يكون بين الكلية الموجبة والسالبة علاقة تضاد ، بينما تكون علاقة التناقض بين الكلية الموجبة والجزئية السالبة ، وبين الكلية السالبة والجزئية الموجبة . وتكون علاقة التداخل بين الكلية الموجبة والجزئية الموجبة ، وبين الكلية السالبة والجزئية السالبة . اما علاقة الدخول تحت التضاد فتكون بين الجزئية الموجبة والجزئية السالبة .

تبقى هذه العلاقات قائمة على حالها في المربع المنطقي لفريجه مع تغير في شكل القضايا الاربعة ، حيث استعان فريجه بطريقته الرمزية في التعبير عنها بطريقة جديدة . وبناء على ذلك يكون المربع المنطقي لفريجه بالشكل الآتي :-