نظرية جوتلوب فريجه المنطقية

الدكتور ياسين خليل
استاذ مساعد فى كلية الآداب

الطريقة فى المنطق

مقدمـــة :

لكل علم من العلوم الطبيعية او الرياضية او الانسانية طريقة ومنهج يستخدمه الباحث للوصول الى المعرفة الحقيقية ، ولا نقصد بالمعرفة الحقيقية ما اعتاد الفلاسفة عليه من وصفها بالمعرفة اليقينية المطلقة ، بل نقصد بها تلك الخبرات التي تؤلف بفعل المنهج مبادىء منظمة يستطيع المرء بواسطتها تفسير اوسع قدر من مادة البحث والاهتداء الى حقائق جديدة .

ونحن الآن بصدد طريقة مهمة نظر اليها العلماء والفلاسفة منذ القديم حتى يومنا هذا كأساس متين تقوم عليه جميع العلوم ، بل ذهب العلماء والفلاسفة الى ابعد من ذلك حتى الزموا كل باحث بالاخذ بها ان هو اراد تأسيس علم او بناء نظام فكري او رمزي بعيد عن المتناقضات والغموض : هذه الطريقة هي المنهج المنطقي في البحث .

يتصور كثير من الناس ان هذه الطريقة في المنطق لايمكن ان تحقق ما يصبوا اليه العلماء ، وهم في تصورهم هذا انما يفهمون الطريقة بشكل يختلف عما هو معروف بين المناطقة ، فليست هذه الطريقة مرتبطة بالميتافيزيقا كما تخيلها هيجل ، كما انها لا تمت بصلة للطريقة التي اقترحها ماركس في تفسير المادة والتاريـــخ والتطور الاجتماعي[1] . انها طريقة بعيدة كل البعد عن هذه المفاهيم الفلسفية ،

(١) نقصد بذلك الطريقة الديالكتيكية باعتبارها منهج الميتافيزيقا المنطقي كما هو معروف عند هيجل ، او منهج الديالكتيكية المادية كما هو معروف عند كارل ماركس . وفي الحالتين لا يمكن اعتبار هذه الطريقة منهجا منطقيا بالمعنى الدقيق لهذه الكلمة .

لانها من حيث كونها اسلوبا منهجيا علميا عاما لا ترسم الا خطوطا تركيبية وعلاقات شكلية لرموز مختلفة تؤلف النظام المنطقي او الصوري • واذا ارتبطت الطريقة بهذا المعنى دون غيره ، فانها من دون شك تصلح لان تكون قاعدة عامة لجميع العلوم ، لان الصفة التركيبية والشكلية تجعل من الرموز مجرد اشارات يمكن تفسيرها تبعا للعلم الذي نريد اشتقاقه منها • وعلى هذا الاساس يشترط ان يكون التركيب المنطقي العام حاويا على جميع الصفات الاساسية للعلوم المختلفة •والطريقة في المنطق هي الوسيلة التي نستطيع بواسطتها اكتشاف هذا التركيب العام ليكون اساسا للعلوم جميعا • واذا كانت الطريقة في المنطق تستخدم الرموز والاشارات والعلاقات دون الكلمات ، فانها تقترب بذلك من الطريقة المتبعة في العلوم الرياضية حيث تلعب التراكيب والصيغ دورا رئيساً في البرهان والاستدلال • وبناء على ذلك يمكن تسمية الطريقة في المنطق بالطريقة الرياضية ، وهي تسمية تدل على مقدار تأثر المناطقة بالرياضيات في تعبيرهم عن الافكار والقضايا المنطقية بطريقة شبيهة بالرياضيات من حيث استخدام الرموز والانظمة الشكلية • وفي الحقيقة اننا نجد معظم محاولات الفلاسفة في بناء الانظمة الفلسفية متأثرة بالرياضيات التي اعتبرها الفلاسفة مثال العلم اليقيني(٢) • ولكن تقدم العلم الرياضي وملاحظة علمائه للطريقة الاستدلالية الموجودة فيه جعلهم ينظرون الى المنطق باعتباره أساس الرياضيات لما له من علاقة وثيقة بالاستدلال والاستنتاج • وبناء على ذلك يمكن تسمية الطريقة هذه بالطريقة المنطقية في الرياضيات ، وذلك لان علماء الرياضة وجدوا في هذه الطريقة

---

(٢) هنالك امثلة كثيرة في تاريخ المنطق تبين شدة الصلة بين الفلسفة والرياضيات ، فالمدرسة الفيثاغورية مثلا اهتمت بالاعداد واعتبرت العالم عدد ونغم ، وتأثرت فلسفة افلاطون المنهجية بالرياضيات الى حد كبير ، كما يظهر تأثير الرياضيات في منطق ارسطو بارز الوضوح • واصبح للرياضيات دورها الكبير في التفكير الفلسفي عند الفلاسفة المسلمين ، وظهر هذا الدور في العصر الوسيط المسيحي • وكان رينه ديكارت رائدا في العصر الحديث في اتخاذ المنهج الرياضي اساسا لحل المشكلات الفلسفية كما يظهر ذلك بوضوح في منهجه • وحاول سبينوزا بناء ميتافيزيقا على أسس شبيهة بالرياضيات ، وجاءت ابحاث ليبنتز معبرة عن اثر الرياضة في الفلسفة والمنطق • اما في الفلسفة المعاصرة فهناك رسل وادنجتون وجيمس جينس واخرين غيرهم ممن تأثر بالرياضيات في فلسفته •

خير عون لهم يعتمدون عليه في البرهان التام الخالي من الفجوات التي طالما اشتكى منها علماء الرياضة .

وبناء على التحليل المتقدم للطريقة نفضل الاقتصار على العبارة « الطريقة في المنطق » ، ونقصد بها الطريقة الرياضية في المنطق والطريقة المنطقية في الرياضيات، خاصة وان جوتلوب فريجه في بحوثه المنطقية والرياضية ينظر الى الطريقة هذه النظرة المزدوجة ، فيحاول بناء نظام منطقي شبيه بالانظمة المعروفة في الرياضيات مستخدما الرموز والعلاقات ، ليكون هذا النظام من جديد اساسا للعلوم الرياضية في العمليات البرهانية والاستدلالية .

١

الرياضيات التعميمية Mathesis Universalis

ترجع علاقة الفلسفة بالرياضيات الى البدايات الاولى للتفكير الانساني في العالم المادي وصوره وامكانية تحليله وتفسيره . وبقيت هذه العلاقة متواصلة حتى يومنا هذا[٣] ، فاننا نلمس تأثير الفلسفة في الرياضيات واثر الرياضيات في الفلسفة. ولقد حاول الفلاسفة بناء الفلسفة على أسس رياضية ، وذلك للتخلص من الجدل المتناقض اولا والوصول بالفلسفة الى مصاف العلوم ثانيا .

وكانت فكرة Mathesis Universalis التي تبلـــورت على يد ديكارت وليبنتز وباسكال تهدف الى تعميم الرياضيات وتطبيقها على موضوعات اخرى. ونقصد

(٣) توجد في فلسفة القرن العشرين اتجاهات متعددة تؤكد اثر الرياضيات في الفلسفة وبالعكس . ومن اهم هذه الاتجاهات « الوضعية المنطقية » التي تزعمها طائفة من علماء الرياضيات والمنطق والفلسفة ، وكانت غايتها تخليص العلوم من الميتافيزيقا وبناء قاعدة علميـة رياضية موحدة لجميع العلوم . أمـا اثر الرياضيات في المنطق فظاهر ، خاصة وان جميع الدراسات المنطقية التي حاولت اشتقاق الرياضيات من المنطق او التي بلغت في رمزية المنطق حدا كبير اعتمدت على الطريقة الرياضية ودقة التعبير المتوفرة فى الرياضيات . واعتمدت بعض الفلسفات المثالية على الرياضيات كما هو واضح في كتابات جيمس جينس وآرثر ادنجتون .

بالرياضيات التعميمية الخروج من دائرة الرياضيات الاعتيادية الضيقة والاستفادة من مفاهيم العلوم غير الرياضية بغية توسيع هذه الدائرة بحيث تشمل علوما كثيرة تتفق في كونها تتخذ من الطريقة الرياضية في البـــرهان والاستدلال والرمزية اساسا لها • وبهذا المنهج العام تتوسع الرياضيات وتصبح عامة لعـــلوم شتى • ويترتب على هذا الهدف الكبير ما يأتي :ـ

أ ـ اختيار مفاهيم معينة تصلح لان تكون خاضعة للعمليات الرياضية •

ب ـ تطبيق طريقة التعريف المنطقية على هذه المفاهيم ، وذلك بغية تحديد معانيها ، لكي لا يسودها الغموض والابهام •

ج ـ تطبيق الطريقة الرياضية المعروفة في البرهان والاستدلال والرمزية •

فاذا تحققت هذه الشروط العامة امكن جعل العلوم غير الرياضية جزء من المنهاج الذي تسعى الرياضيات التعميمية الى تحقيقه • وهذه الشروط الثلاثةتؤلف اعمدة الطريقة في المنطق والرياضيات ، ومن دونها لا يمكن تحقيق الهدف المنطقي الكبير في بناء علم لجميع العلوم ، وهو الهدف الذي لا يزال قائما في بعض اتجاهات الفلسفة المعاصرة •

لقد بذلت محاولات جدية كثيرة لتحقيق هذا الهدف ، فكان ريمـــاندوس لولوس (١٢٣٥ ـ ١٣١٥) الرائد الاول • ومن الجدير بالذكر هنا ان مثل هذه المحاولات قديمة اشترك فيها الشراح القدماء والعرب وفلاسفة العصر الوسيط(٤) وقد تركزت البحوث جميعها على استحداث طريقة يستطيع الفرد بواسطتها جعل الاستدلال ميكانيكيا بغية ايجاد علم يصلح لان يكون اساسا لجميع العلوم ، بحيث يكون بمقدور هذا العلم الوصول الى جميع الحقائق بالاستدلال المنطقي • وكانت المحاولات الاولى منصبة على منطق ارسطو وهندسة اقليدس التي اتخذها العرب وفلاسفة العصر نموذجا مثاليا لعملية الاستدلال والبرهان •

حاول ريماندوس لولوس ايجاد طريقة يستطيع بواسطتها الحصول على جميع النتائج او الحقائق ، وهي الطريقة التي عرفت بالفن الكبير Ars Magna ، وذلك

(4) Bochenski, J.M., Formale Logik P. 318.

بان وضع نظاما على شكل اقراص دائرية متحركة قسمت الى حقول ، وقد رمز لكل حقل بحرف في القرص الكبير ، بينما وضع الاسماء والصفات في الاقراص الاخرى • فاذا ما تحركت هذه الاقراص بطريقة معينة امكننا الحصول على قضايا دينية او لاهوتية صادقة مثل « الله عادل » او « الله خير » وهكذا • ورغم كون الطريقة مطبقة على اللاهوت الا ان الفكرة التي سعى لولوس لتحقيقها جديرة بالاهتمام ، لانه اراد بهذه الطريقة استنتاج جميع الحقائق المعروفة في اللاهوت المسيحي والدين(٥) •

ولقد اثارت هذه الطريقة اهتمام ليبنتز الذي قرأ لولوس ، فدفعه هذا الاهتمام في الاتجاه نفسه نحو ايجاد قاعدة عامة لجميع العلوم مستعينا بالطريقة المنطقية • ولكن هذا العمل اكتسب جدية اعظم على يد ليبنتز خاصة وانه عالم الرياضيات من الطراز الاول ، فحاول نتيجة لخبرته الرياضية ان يقوم ببناء هذه القاعدة العامة بشكل يقترب بها من الرياضيات وحساباتها •

وكانت خطة ليبنتز وبرنامجه المنطقي العام محل اهتمام المناطقة والفلاسفةعلى حد سواء ، وقد سعى الى تحقيقه ولا يزال ائمة المنطق الرياضى وفلاسفة العصر الحديث(٦) • وقد اثنى فريجه على ما قدمه ليبنتز في هذا الحقل واعتبر فكرته في اللغة العامة عظيمة(٧) تزيد من القدرة العقلية وتذلل الصعاب والعقبات • ويعتبر ما قدمه فريجة في المنطق تحقيقا لفكرة ليبنتز في ايجاد طريقة رمزية تصلح لان تكون قاعدة للعلوم • وينطوي عمل ليبنتز على ايجاد خطة او طريقة اولا ، وعمل

---

(٥) حاول بوخنسكي في كتابه « المنطق الصوري » الانف الذكر تقديم مقتطفات من كتاب الفن الكبير للولوس ، مبينا في ذلك اهتمام لولوس بالطريقة الارتباطية والميكانيكية التي اثرت على ليبنتز (ص ٣١٩) •

(٦) بالرغم من عدم نشر مؤلفات ليبنتز المنطقية الا حديثا ، فان أثره في فريجه واضح جدا ، واذا نظرنا الى الدراسات المنطقية المعاصرة منذ ان ظهر كتاب رسل ووايتهيد Principia Mathematica ، فاننا سرعان ما نصل الى نتيجة هامة هي ان الجهد الذى يبذل في هذه الدراسات انما يسعى الى تحقيق هدف ليبنتز بالاستعاضة عن الكلمات بالرموز والحجج بالمنطق •

(7) Frege, G., Begriffsschrift P. XI.

برنامج عام وشامل ثانيا • يتمثل العمل الاول بما يسمى عادة بالطريقة الارتباطية Combinatory Method أما العمل الثاني فهو من صميم الرياضيات التعميمية او Mathesis Universalis وتتلخص الطريقة الاولى بما يأتي :ـ

أ ـ وضع الف باء للافكار ، وذلك باقتران كل فكرة برمز واحد فقط بعد تحليل الافكار والمفاهيم الى بسائطها •

ب ـ وضع كل الارتباطات المحتملة للافكار البسيطة ، ويستحسن عمل جدول (اذا كان ذلك ممكنا) يبين فيه جميع الافكار البسيطة •

ولكن ليبنتز لم يتوقف عند هذا الحد ، بل ذهب الى ابعد من ذلك واضعاً الشروط التي يجب ان تتوفر في الحساب المنطقي ، وهذه الشروط هي :ـ

١ ـ يجب تحليل جميع الافكار المركبة او المعقدة الى افكار بسيطة هي اوليات الافكار الاولى •

٢ ـ ان الافكار المركبة تتألف من الافكار البسيطة وذلك بالطريقة الارتباطية ، حيث تكون الافكار البسيطة قليلة العدد ، لكنها بفضل الترابط تنتج افكارا كثيرة العدد •

٣ ـ يجب ان يكون لكل فكرة رمز واحد فقط ، فيكون للفكرة البسيطة رمز بسيط وللفكرة المركبة رمز مركب ، بحيث ان تحليل الرمز المركب يوجب كذلك تحليلا متناظرا في الفكرة المركبة •

٤ ـ ايجاد العمليات الاستدلالية وذلك باكتشاف جميع العلاقات القائمة بين الافكار البسيطة ، وهذه عملية جوهرية يتم بواسطتها تحقيق الميكانيكية الرياضية في المنطق والحساب •

ولقد اصاب ليبنتز في وضع هذا البرنامج الذي اصبح حجر الزاوية في النظريات المنطقية الحديثة التي تقترب من الرياضيات في الطريقة والمنهج • ولاشك ان اثر الرياضيات في فلسفة ليبنتز المنطقية كان له اكبر الاثر في بناء لغة عامة يستعين بها الفكر على حل المشكلات وتكون دليلا دقيقا لحسم النزاع بين الفلاسفة والمفكرين • فالبرهان على الحقائق التي تحتاج الى هذه العملية يكمن في تحليل

الافكار التي يصاحبها تحليل للرموز فتصبح هذه الافكار محسوسة تجري تبع طريقة ميكانيكية • واذا تم هذا العمل ، وذلك بوضع لغة رمزية للفكر Charakteristik der Vernunft تتخذ شكل حساب كما هو معروف في علم الحساب والجبر • ولقد ادرك ليبنتز خطر استعمال اللغة المتداولة ، لان كلماتها وعباراتها تحتوي على معان مختلفة تزيد في غموض العبارة وابهامها ، فلابد من اختيار لغة رمزية تقضي على هذا الابهام وتتخذ من الاستدلال اساسا ومنهجا • ويقترح ليبنتز طريقتين منطقيتين متأثرا بلولوس :ـ

١ ـ طريقة الاختراع Ars inveniendi وهي طريقة عامة نتوصل بواسطتها الى اشتقاقات او الى جميع النتائج من مقدمات مفروضة بالتوالي •

٢ ـ طريقة التقرير Ars iudicandi وهي طريقة نقرر بمساعدتها وبعد خطوات نهائية فيما اذا كانت العبارات او الصيغ المنطقية موجودة في تتابع منطقي ام لا[٨] •

واذا نظرنا الى فلسفة ليبنتز التي احتواها بحثه في المونادولوجيا ، فاننا سرعان ما نتبين اثر الرياضيات فيها ، فالحقائق عنده على نوعين :ـ حقائق عقلية وحقائق واقعية ، تتميز الحقائق العقلية بكونها ضرورية وضدها غير ممكن (مستحيل) ، أما الحقائق الواقعية فتتميز بكونها احتمالية وضدها ممكن ••••ـ•ـ• وان قضايا الرياضيات ترجع بالتحليل الى تعريفات وبديهيات ومصادرات[٩] • وفي نهاية المطاف يصل الفرد الى افكار بسيطة لا يستطيع ان يعطيها تعريفا ، ويصل كذلك الى بديهيات ومصادرات وبعبارة اخرى الى المبادىء الاساسية التي لا يمكن البرهان عليها ، بل ولا تحتاج اليه • وهذه هي القضايا الذاتية Die identischen Aussagen التي يحتوي ضدها على تناقض واضح[١٠] •

وبناء على ما تقدم يصبح امامنا الطريق واضح المعالم ، الطريق الذي يجب ان تقوم عليه الرياضيات التعميمية ، وهو ان نبدأ بافكار بسيطة غير معرفة نعرف

---

(8) Hermes, H., Einführung in die mathematische Logik P. 79.

(9) Monadologie, § 33, § 34.

(10) Ibid., § 35

بواسطتها ما يمكن تعريفه من الافكار الجوهرية ، وبديهيات لا تحتاج الى برهان ، وتعريفات نستخدمها في الخطوات الاستدلالية والبرهان • وهذه هي الطريقة التي اتخذها المناطقة سبيلا لهم في بناء الانظمة المنطقية ، وقد حقق اهدافها في حقل المنطق جوتلوب فريجة الذي سنشرح طريقته بالتفصيل في بناء لغته الرمزية •

٢

الاستدلال والبرهان

(١) شروط البرهان

يعتبر اقليدس في بناء علم الهندسة الرائد الاول من حيث انه استطاع صياغة الكثير من خبرات الشعوب التجريبية في حقل الهندسة في نظام متناسق تترتب فيه القضايا بشكل منطقي ، بحيث تصبح اجزاء هذا النظام كلا متناسقا • واستخدم اقليدس في عمله هذا الاستدلال المنطقي والبرهان لبناء نظامه الهندسي ، فلا يمكن حل مشكلة هندسية الا بالاعتماد على ما سبقها من مشكلات محلولة او بديهيات موضوعة او تعريفات توضيحية • واصبح هذا النظام المثال الحي للدراسات الرياضية ، بل حاولت بعض الدراسات الفلسفية ان تتخذه اساسا لبناء فلسفة برهانية(١١) •

ولكننا في الوقت نفسه علينا ان لا نغفل العمل العلمي الذي قدمه ارسطو في حقل المنطق ، فرغم اختلاف الخط التطوري للمنطق والرياضيات ، الا اننا في حقيقة الامر نلمس الالتقاء التام منذ المرحلة الاولى ، فنظام ارسطو المنطقي لا يختلف من حيث البناء عن نظام اقليدس الهندسي اللهم الا في المفاهيم والافكار الاولية ، وهذا أمر بديهي لاختلاف طبيعة المنطق عن الرياضيات • واذا امعنا النظر في هندسة اقليدس ، فاننا نجد قوانين منطقية في البرهان هي الاساس في الاستدلال وحل المشكلات الهندسية ، وهذا تداخل يؤكد علاقة المنطق بالرياضيات منذ بدايات التطور الاولى •

---

(١١) حاول سبينوزا بناء فلسفته الاخلاقية الميتافيزيقية في كتابه [Ethik] تبعا للطريقة الهندسية في التعريفات والبديهيات والبراهين •

وجوتلوب فريجة الذي ساهم في ترسيخ العلاقة بين المنطق والرياضيات كان الرائد الاول في بناء لغة رمزية من نمط جديد استطاع بواسطتها التعبير عن اول نظام رياضي في المنطق متخذا من طريقة التحليل المنطقي للافكار والمبادىء اساسا في كشف العلاقة واثبات ان الرياضيات منطق متطور وان اصل الرياضيات منطق سواء في حقل المفاهيم او في حقل البرهان والاستدلال • ونظرية البرهان عند فريجة تتصف بكونها رمزية بحتة لا تحتوي البراهين فيها على كلمات او توضيحات جانبية او وصف منطقي يساهم في عملية البرهان بطريق غير مباشر ، بل اننا نجد في البرهان سلسلة من رموز للتعبير عن المعاني الصورية والتراكيب الرياضية ، كما اننا لا نجد غير سلسلة من صيغ رمزية متتابعة باستدلال منطقي ، حيث ان كل قضية او صيغة في هذه السلسلة قضية تامة الشروط وصادقة ، لانه اذا كان بين هذه الصيغ الزام او تتابع منطقي ، فان صدق المقدمة يستلزم بالضرورة صدق النتيجة • وما دامت العملية البرهانية تبدأ اولا بالبديهيات والتعريفات او مبرهنات سبق البرهان عليها وهي قضايا صادقة ، فان جميع القضايا فى سلسلة التتابع المنطقي الاستدلالي تكون صادقة ، لانه لايمكن استنتاج قضية كاذبة من مقدمات صادقة في برهان مكتمل الشروط •

وعلى هذا الاساس يجدر بنا تحديد معنى اكتمال الشروط في البرهان كما يراها فريجة في منطقه الرياضى ، لان هذه الشروط هي العمود الفقري في عملية البرهان ، وان البرهان لا يكون صحيح البناء اذا لم يستوف هذه الشروط جميعا :ـ

الشرط الاول : ويسمى هذا الشرط بشرط الكمال Vollständigkeit. يجب ان يكون البرهان وجميع العمليات الاستدلالية مكتفية بالرموز والتراكيب بعيدة كل البعد عن استخدام الكلمات والعبارات المساعدة في البرهان ، لان وجود هذه العبارات اللغوية دليل على عدم قدرة الطريقة الرمزية على التعبير عن جميع الافكار والمبادىء ، كما انه دليل على عدم كمال البرهان • لذلك يشترط ان تكون الطريقة الرمزية هي اللغة الوحيدة في التعبير عند أقامة البرهان • وبذلك يسلم البرهان من الغموض والالتباس •

هذا الشرط الذي حققه فريجة في دراساته المنطقية والرياضية هو الهدف الذي وضعه ليبنتز أمام عينيه في رسم خطوط برنامجه العام لبناء اللغة العامة Charakteristica Universalis ، لكي تصبح الرموز هي الحكم في المناقشة والبرهان .

الشرط الثاني : وهو شرط التابع المنطقي Logische Folgerung. يجب ان تكون القضايا في العملية البرهانية متتابعة يلزم بعضها عن البعض الاخر ، وبذلك نضمن صدق القضايا الموجودة في التتابع المنطقي ، لان علينا ان نبدأ بقضايا لا تحتاج الى برهان تتميز بالصدق ، وبهذا الشرط تسلم العملية البرهانية من حدوث قضية كاذبة في التتابع ، لان جميع القضايا المتتابعة في عملية البرهان يجب ان تكون صادقة ما دامت المقدمات صادقة خالية من التناقض .

هذا الشرط مهم جدا في كل عملية برهانية ، والا فان الاستدلال لا يمكن ان يكون أساس البرهان ، لان علينا ان نفترض قضايا صادقة هي البديهيات فنستنتج منها قضايا اخرى . وعملية الاستنتاج هذه هي عملية تتابع منطقي ، فاذا صدقت البديهيات صدقت جميع القضايا الملزمة عنها . وبتحقيق هذا الشرط المنطقي يكون فريجة قد حقق شرط ليبنتز في الحساب المنطقي المسمى « بفن التقرير » ، لاننا تبعا لشرط التتابع نستطيع ان نقرر فيما اذا كانت قضية ما مفروضة في تتابع منطقي أم لا ، فاذا كانت موجودة في التتابع فانها صادقة ، أما اذا لم تكن فانها قضية كاذبة او غير مقررة Unentscheidbar

الشرط الثالث: وهو شرط الاشتقاق المنطقي Logische Ableitung. يجب ان يكون الانتقال من قضية الى اخرى خاضعاً لقوانين استنتاجية ، وانه لا يمكن باي حال من الاحوال ان يكون البرهان بغيرها ، لانها هي العمود الفقري في العملية الاستدلالية ومن دونها لا يمكن ان يتحقق البرهان وتكاثر القضايا . وبعبارة اخرى انه لا يمكن الانتقال من قضية الى اخرى من دون قوانين الاستنتاج .

هذا الشرط ضروري في البرهان لانه ضمان اكيد لاستنتاج قضايا من جهة ، وانه شرط مهم لتحقيق ميكانيكية العملية البرهانية من جهة اخرى • وفي هـذا الشرط الذي حققه فريجه في منطقه يكون هذا العالم المنطقي قد حقق في الوقت نفسه شرط ليبنتز في الحساب المنطقي وهو ان يكون الانتقال من قضية الى اخرى ميكانيكيا يخضع لقوانين وقواعد منطقية فقط ، وهو الشرط الذي اطلق عليه ليبنتز اسم « فن الاختراع » ، لاننا تبعا لشرط الاشتقاق نحصل على اشتقاقات منطقيـة تزيد من قدرة النظام المنطقي •

الشرط الرابع : وهو شرط تكامل السلسلة الاستنتاجية **Lükenlosigkeit der Schlussketten** يجب ان يكون البرهان دقيقا بحيث لا يترك شيئا ضروريا يدخل في العملية الاستدلالية الا ودخل فيها ، فلا يمكـن الانتقال من قضية الى اخرى دون ذكر القانون الذي تم بموجبـه الانتقال • وبواسطة شرط تكامل السلسلة الاستنتاجية نكون قد وصلنا الى ان كل بديهية او فرضية يقوم عليها البرهان لابد من ابرازهـا لتكون قاعدة أساسية للقوانين المبرهنة •

يذكر فريجة هذا الشرط ردا على ما شاهده في كتـاب ديدكند المعروف « ما الاعداد وماذا تكون »[١٢] من اختصار للبرهان وعدم ذكر الخطوات الاستدلالية بالتفصيل • وقد ترك هذا الاختصار الكثير بعض من القضايا التي لم يبرهن عليها ، وهذا بطبيعة الحال نقص في البرهان ، اضافة الى عدم ذكر ديدكند مجموعة من القوانين المنطقية الاساسية او غيرها • وهذا يشكل في الحقيقة صورة غير صحيحـة ومرتبكة للطريقة التي يريدها ديدكند في اخضاع الرياضيات الى المنطق • وعلى هذا الاساس تصبح الحاجة الى ذكر جميع القوانين التي نحتاجها في البرهان من الامـور الضرورية لكي نعرف كيفية الانتقال من قضية الى اخرى ، ونميز بين القضايا التي تحتاج الى برهان ، والقضايا التي لا تفتقر اليه ، لان البرهان على قضية ما يجب ان يتناول في التتابع المنطقي للقضايا قضايا هي أما مبرهنات سبق البرهان عليها او قضايا هي بديهيات ، وفي هذه الحالة يصبح الاستدلال المنطقي مستوفيا للشروط المنطقيـة المعروفة •

(12) Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen?

الشرط الخامس : وهو شرط المنطقية في البرهان او ما يسمى عادة بالاساس المنطقي Logische Grundlage : يجب ان تكون القواعد والقوانين منطقية ، بحيث ان جميع الانتقالات في البراهين تكون تبعا لقوانين منطقية معروفة، وان الحدس في هذه الحالات غير ممكن ، وانه اذا حللنا جميع هذه الانتقالات بخطوات منطقية بسيطة ، فان بامكاننا ان نبين انه لايوجد غير المنطق اساسا لها •

هذا شرط ضروري ما دام فريجه في كتبه المنطقية يحاول اخضاع علم الحساب او الرياضيات الى المنطق • لاننا اذا اعتبرنا جميع البراهين التي يسوقها فريجه برهانا واحدا يبدأ بالبديهيات والتعريفات وقوانين الاستنتاج مع استيفاء شروط البرهان ، فان هذا البرهان الجامع يبرهن على ان علم الحساب منطق متطور او ان أساس علم الحساب هو المنطق فقط • واذا كان هناك رأي آخر يشك في هذا البرهان ، فيجب ان يشير هذا الشك الى احتمال الخطأ في البديهيات والتعريفات او القوانين الاستنتاجية وتطبيقاتها في محلات معينة ، والا فان البرهان الذي نستطيع ان ندعوه نظرية فريجه الاستدلالية منطقي بحت • وبذلك يثبت رأي فريجه في اخضاع علم الحساب الى المنطق • وهذه هي الصفة المنطقية في البرهان والنظرية بمعناها الواسع •

ان استيفاء البرهان لهذه الشروط ما هو الا دليل على ادراك فريجه لمسائل مهمة في المنطق والرياضيات ، فالبراهين المعروفة في حقل الرياضيات كما ادركها فريجه خالية من ذكر القوانين المنطقية التي يستخدمها عالم الرياضيات في العمليات البرهانية ويعتبرها تحصيل حاصل ، مع العلم ان هذه القوانين هي الاساس في الاستنتاج • كما ادرك فريجه الاخطاء المترتبة على استعمال اللغة لايضاح بعض الخطوات الاستنتاجية ، فجاء منطقه خاليا من هذه الاستعمالات فحقق رمزية مطلقة في الرياضيات والمنطق • وادرك كذلك الرباط الوثيق بين المنطق والرياضيات فلم يكتف بالاشارة الى هذا الارتباط ، بل جعل المنطق هو الاساس سواء في تحقيقه لشروط البرهان او في اعتماده على المفاهيم والمبادىء المنطقية في اشتقاق الرياضيات • وبهذا العمل يكون فريجه قد ارتفع بنظامه الى الكمال الذي كان ينشده الفلاسفة والمناطقة وعلماء الرياضيات •

(ب) الحساب المنطقي ونظامه

تحدثنا فيما سبق عن الشروط التي يجب توفرها في البرهان وعلينا الآن ان ننظر الى ما قام به فريجه في بناء الحساب المنطقي الـذي يظهر فيـه الاستدلال والبرهان بشكل واضح ، لان علينا ان نميز بين البديهيات والمبرهنات التي تحتاج الى الاستدلال والبرهان • وتجدر الاشارة هنا الى ان مثل هذا العمل قام به اقليدس في حقل الرياضيات الهندسية • فاذا استعرضنا « مبادىء اقليدس »[١٣] وما يتضمنه هذا الكتاب من كتب فرعية لوجدناه يبـدأ بتعريفات للمفاهيـم الهندسـية وهي ايضاحات للافكار الاولية التي تظهر في البديهيات ، ثم ينتقل بعد ذلك الى ذكر المصـادرات Postulates والتي يبلغ عددها في الكتاب الاول مثلا ثلاث ، ويذكر بعدها البديهيات Axioms التـي يبلـغ عـددها اثنتى عشـر بديهية • كما قام بمثل هذا العمل ارسطو في كتابه التحليلات الاولى[١٤] حيث عرف بعض المفاهيم المنطقية المهمة اولا مثل الحد والموضوع والمحمول والمقدمة والقياس وغير ذلك لينتقل بعد ذلك الى ذكر الاقيسة التامة وهي البديهيات وعددها أربع في محاولته الاولى[١٥] ثم يخضع بديهيتين منهما بالبرهنة عليها الى البديهيتين الاوليتين ، فتكون المحاولة الثانية[١٦] محتوية على بديهيتين فقط • والشيء الذي يجب ذكره هنا لما له اهمية بالنسبة للمنطق والرياضيات ان ارسطو ذكر القوانين الاستنتاجية واستخدمها في البرهان على المبرهنات ، وبذلك تكون محاولة ارسطو جدية في هذا الصدد لاجل اقامة برهان خال من النقص • وبهذه الطريقة التي اتبعها ارسطو يكون المنطق قد استخدم الطريقة الرياضية بدقة بليغة لصياغة الحساب المنطقي او القياس اذا اردنا استخدام تعبير ارسطو •

وبلغت هذه الطريقة المنطقية ـ الرياضية غايتها عند جوتلوب فريجه الـذي حاول في كتابه المعروف باللغة الرمزية Begriffsschrift ان يعطينا حسابا

---

(13) Euclid's Elements.

(14) Organon, Analytica Priora

(١٥) نظرية ارسطو المنطقية الدكتور ياسين خليل ص ١١٦ـ١١٧ •

(١٦) المصدر السابق ص ١١٧ •

منطقيا متكاملا مستوفيا لجميع الشروط مستفيدا من الدراسات الرياضية التي بلغت من التقدم في فن البناء غاية في الدقة والعمل الاستدلالي • واذا اردنا التعرف على جوهر هذه الطريقة والبناء الشكلي لحساب فريجه المنطقي ، فان علينا ان نبدأ بكتابه « اللغة الرمزية » باعتباره المحاولة الاولى لبناء هذا الحساب • ومن الجدير بالذكر ان فريجه غير بعض المفاهيم والبناء الشكلي للحساب في كتابه المعروف « القوانين الاساسية لعلم الحساب »[١٧] ، اما الطريقة فانها بقيت ثابتة كما بقيت الخطوط الاساسية في بناء النظام ثابتة • لذلك فان الاخذ بالكتاب الاول لاستخلاص الطريقة بمثابة عرض عام لطريقته العامة التي اتبعها في كتبه المنطقية • ولكن ذلك لا يعني بتاتا تجاهل كتابه الرئيس ، بل سنحاول الاستفادة منه بعد عرض الخطوات المنطقية في كتابه الاول •

يتألف الحساب المنطقي كما بينه فريجه في كتابه « اللغة الرمزية » من ثلاث خطوات رئيسة ، جاء في القسم الاول من كتابه عرضا للافكار الاولية وايضاحا للرموز التي يتألف منها الحساب المنطقي • وهذه الافكار تؤلف في جوهرها الف باء اللغة الرمزية • وبامكاننا تصنيف هذه الافكار الى ما يأتي :ـ

١ ـ الافكار الاولية وتتألف من :

أ ـ المتغيرات والثوابت •

ب ـ الروابط المنطقية وتشمل الالزام والشرطية والبدل والعطف والنفي والذاتية •

جـ ـ الدالة والحد •

د ـ الثوابت المنطقية وتشمل الكلية والجزئية (واحد على الاقل) اما في القسم الثاني من الكتاب المذكور فان فريجه باشر بوضع القوانين الاساسية التي تعتمد عليها العملية الاستدلالية ، فجاءت بالشكل الآتي :

---

(١٧) انظر نظرية جوتلوب فريجه المنطقية ـ المنطق واللغة ص ١٣٥ـ١٣٦ • [مجلة كلية الاداب ـ العدد السابع ـ سنة ١٩٦٤] •

٣ ـ القوانين الاساسية وتشمل :

أ ـ ما يتصل منها بالالزام وهي ثلاث بديهيات

ب ـ ما يتصل منها بالنفي وهي ثلاث بديهيات

جـ ـ ما يتصل منها بالذاتية وهي بديهيتان •

د ـ ما يتصل بالكلية وهي بديهية واحدة

اما في القسم الثالث من اللغة الرمزية فيحتوي على تطبيقات لطريقته الرمزية • ومن الجدير بالذكر هنا ان القسم الثاني من الكتاب احتوى على الخطوتين الثانية والثالثة ، لان فريجه برهن على بعض القضايا مستعينا بالبديهيات والقوانين الاستنتاجية ، وبذلك تكون الخطوة التالية هي البرهان على المبرهنات • واذا نظرنا الى هذا النظام من زاوية حديثة جدا ، فاننا نجد تشابها تاما في الخطوات التي يتخذها علماء المنطق حديثا ، فرودلف كارناب مثلا يسمي الخطوة الاولى التي تضم الافكار الاولية والتعريفات والتراكيب البسيطة بالقوانين البنائية Formreglen ، بينما يسمي الخطوة الثانية بالقوانين التحويلية Umformungsregeln ، أما الخطوة الثالثة فهي عنده البراهين والاشتقاقات[١٨] •

ولكن مثابرة فريجه المستمرة لتحقيق هدفه في اشتقاق الرياضيات من المنطق جعلته يطور طريقته في عرض الحساب المنطقي ، ففي كتابه « القوانين الاساسية لعلم الحساب » « الجزء الاول » بدأ في القسم الاول بمناقشة الافكار الاولية وهي الدالة والفكرة والعلاقة • وهنا يظهر تأثير آراء فريجه التي انتهى اليها بعد مناقشات طويلة في مقالات متعددة حول المعنى والدلالة والشيء وغيرها • وهذا هو السبب المباشر الذي ادى الى حصول بعض التغيير في نظام فريجه المنطقي • والى جانب ذلك يوجد سبب آخر مهم هو ان محاولة فريجه في اللغة الرمزية انصبت على تكوين منطق شكلي فيه بديهيات ومبرهنات ليكون قاعدة أساسية للنظرية الاستدلالية في الرياضيات • أما في كتابه الاخير فان فريجه يحاول تحقيق هدفين مترابطين : الاول هو اخضاع الافكار الرياضية الى مفاهيم منطقية والثاني هو

(18) Carnap, R., Symbolische Logik § 21,22,23.

اخضاع البرهان الرياضى الى الطريقة المنطقية الاستدلالية • لذلك نجده يختار الان مفاهيم جديدة تصلح لان تكون قاعدة منطقية لتعريف الافكار الرياضية ، واذا ما تم له ذلك استطاع البرهان على مبدأ اشتقاق علم الرياضيات من المنطق • وعلى هذا الاساس وضع خطة الكتاب التي يمكن عرضها بالشكل الآتي :ـ

القوانين الاساسية لعلم الحساب ـ الجزء الاول •

قام فريجه في القسم الاول من الكتاب بعرض اللغة الرمزية التي احتوت على :ـ

أ ـ الافكار الاولية والرموز الاصلية Urzeichen ، ناقش فيها الدالة والفكرة والعلاقة وعرف الدالة وشرح قيم الصدق والدلالة والمعنى والفكرة والشيء • وانتقل بعد ذلك لمناقشة تعاقب القيم للدالة ، ومجال الفكرة والدالات ذات الحدين • ثم انتقل لمناقشة القضية وبعض الرموز مثل النفي وخط القضية والذاتية والكلية والالزام والبدل والعطف • وبعد ان اتم هذا الايضاح انتقل الى موضوع آخر في غاية الاهمية يتعلق بالنتائج والاشتقاقات والقوانين الاستنتاجية • واخيرا حاول فريجه توسيع مفهوم علاقة الكلية Allgemeinheitsbeziehung فناقش الكلية بالنسبة للدالات والافكار من الدرجة الاولى والثانية وانواع الحدود • والدالات من الدرجة الثانية لحدود من النوع الثاني والثالث ، ثم ناقش الكلية بالنسبة للدالات من الدرجة الثانية •

وكان فريجه في هذا العمل مدركا تمام الادراك هذا التسلسل المنطقي في نظامه المنطقي ـ الرياضى وقد سار بخطوات يمكن تلخيصها بما يأتي :ـ

١ ـ الافكار والرموز البسيطة التي اشتملت على الدالة والفكرة والعلاقة •

٢ ـ الافكار والرموز المركبة التي اشتملت على اهمية الروابط المنطقية باعتبارها الاواصر التي تربط الرموز البسيطة والقضايا المركبة •

٣ ـ النتائج والاشتقاقات باعتبارها الخطوة التي تلي تكوين الرموز المركبة ، كما انها مهمة في العمليات الاستنتاجية وفهم الطريقة الرمزية •

٤ ـ الدالات من الدرجات الثانية والثالثة لما لها من علاقة مباشرة بعلم الحساب ، كما انها في الوقت نفسه تكون نظاما منطقيا جديدا أعلى من النظام المنطقي الذي يشمل دالات من الدرجة الاولى ذات الحدود من النوع الاول .

ب ـ التعريفات Definitionen

تناول فريجه الخطوط العامة للتعريف ، وذلك بتقسيم الرموز والاسماء والصيغ ، وناقش تكوين الاسماء ومتى يدل الاسم على شيء والطرق التي بموجبها يكون هذا التكوين . وتناول القواعد الاساسية في التعريف ، وذلك ضمانا لطريقة واسلوب منطقي في تعريف الاسماء التي تحتاج الى تعريف . وبالفعل تناول فريجه بالتعريف بعض الدالات وتعريف فكرة العدد . وهو في هذا العمل لم يتناول كافة التعريفات ، بل عرف ما هو مهم بالنسبة لهذه المرحلة المنطقية . لذلك نجده يعود الى التعريف في الجزء الثاني من كتاب القوانين الاساسية لعلم الحساب ليعرف اشياء اخرى يحتاجها في المرحلة المنطقية الثانية في البناء العام .

ج ـ القوانين المشتقة Abgeleitete Gesetze

واخيرا يتناول فريجه عرضه للغة الرمزية القوانين الاساسية والقواعد المنطقية وبعض الاشتقاقات المهمة .

واذا نظرنا الان في هذا القسم من تكوين اللغة الرمزية في برنامج فريجه ، فاننا نلمس الطريقة المنطقية التي اتبعها في البناء المنطقي بكل وضوح ، وهو في بحثه هذا لا يختلف عن ما قدمه في كتابه " اللغة الرمزية " من حيث الطريقة اللهم الا بعض الاضافات في مجال المفاهيم والدالات والتعريفات . وهذه الاضافات ضرورية جدا مادام هدف فريجه ايجاد قاعدة منطقية يشتق منها جميع قضايا علم الحساب الضرورية . وهذا ما حصل بالفعل ، فانه يحاول في القسم الثاني من الجزء الاول لكتابه « القوانين الاساسية لعلم الحساب » ان يبرهن على بعض القضايا المهمة المتعلقة بالاعداد وعلم الحساب بعد ان انتهى من بناء نظرية استدلالية منطقية تحتوي على حساب القضايا وحساب دالات القضايا اضافة الى تخطيطه لحساب دالات القضايا من الدرجة الثانية والثالثة التي لها صلة مباشرة بعلم الحساب .

أما القسم الثالث من بحثه الذي تضمنه الجزء الثاني فانه يهتم بالاعـــداد الحقيقية ، وفيه تناول فريجه الدراسات المختلفة بالنقد ، فنجده يستعرض اولا القواعد الاساسية في التعريف واضعا نصب عينيه القاعدة المنطقيـــة في التعريف القائلة : بان على التعريف ان يكون تاما بحيث تكون حدوده واضحة أما القاعـدة الثانية التي يوليها فريجه اهتمامه فهي : ان يكون التعريف بسيطا بعيدا عن التعقيد. أما النظريات التي انتقدها فريجه في هذا البحث فهي نظرية جورج كانتـــور في الاعداد اللاعقلية ونظريات هاينه وتوما وغيرها . كما تناول فريجه في بحثه هذا موضوعا في غاية الاهمية هو نظرية العلاقات والفئات ، وبذلك يكون فريجه الرائد في وضع الاقسام الاربعة المهمة في المنطق الرياضي وهي :-

١ ـ حساب القضايا	Satzkalkül
٢ ـ حساب دالات القضايا	Prädikatenkalkül
٣ ـ حساب العلاقات	Relationenkalkül
٤ ـ حساب الفئات	Klassenkalkül

نستخلص مما تقدم من هذا العرض لطريقة فريجه في بناء الحساب المنطقي انه بدأ بعرض الف باء اللغة الرمزية ليقوم ببناء بعض التراكيب المهمة لخطـــوة ثانية ويختار بعض القضايا كبديهيات ليبرهن بالتالي على القضايا التي تحتاج الى البرهان . فكان في الاول يبني الاساس المنطقي ليستطيع البرهان على قضايا علـم الحساب او اشتقاقها من هذا الاساس . وقد تناول برتراندرسل والفريد نورث وايتهيد في كتابهما Principia Mathematica هذه الطريقة تمـاما في بنـــاء نظريتهما المنطقية التي استقت معظم افكارها ومبادئها وخطوطها الاساسية من دراسات جوتلوب فريجه وابحاثه المنطقية وبصـــورة خاصة من بحثه الشـهير " القوانين الاساسية لعلم الحساب " .

٣

طريقة التحليل المنطقي

ان الدراسات المنطقية والفلسفية المعاصرة مدينة للطريقة التي اتخذت من التحليل أساسا في معالجة المشكلات والمتناقضات • وطريقة التحليل المنطقي هذه بابسط صورها تعني توضيح الافكار والانظمة التي يستخدمها المرء في الدراسات العلمية • ونقصد بتوضيح الافكار والانظمة ما يأتي :ـ

١ ـ تحليل الانظمة الى اولياتها التي تشمل الرموز والعلاقات •

٢ ـ تحديد معاني الرموز وذلك بتعريف ما يمكن تعريفه لكي لا يكون في البحث غموض او تناقض •

فمن الضروري اولا ان نكتشف التركيب العام للنظام وذلك بمعرفة العلاقات التي تربط الرموز بعضها بالبعض واتجاه هذه العلاقات • أما عملية تحديد معاني الرموز فهي ضرورية أيضا ، لانها تعطي للرمز معنى معيناً يميزه عن بقية الرموز • وقد عرف التحليل المنطقي بهذا المعنى عند قدماء الفلاسفة اليونان واتضحت خطوطه الاساسية عند ليبنتز نتيجة لمعرفته بعلم الرياضيات واتخذ شكله النهائي الواضح عند جوتلوب فريجه الذي اتخذ من هذه الطريقة منهجا لمعرفة أسس الرياضيات وعلاقتها بالمنطق • ان الشيء الذي تميز به فريجه في التحليل المنطقي هو معالجته لانظمة مؤلفة من رموز كما هو الحال في الرياضيات مثلا ومحاولته الجدية لتعريف العدد حيث نجد فريجه يقدم نموذجا رائعا للتحليل المنطقي في كتابة " أسس علم الحساب "(١٩) يناقش مختلف الاراء مبينا ضعفها واختلاطها بعلم النفس متوصلا بعد ذلك الى تعريف العدد من الوجهة المنطقية البحتة •

واذا اردنا ان نخرج من هذه الدائرة الضيقة لمفهوم التحليل المنطقي الى دائرة اكبر ، فاننا نستطيع القول ان التحليل المنطقي عملية منطقية تتصل بكل جوانب علم المنطق ، فالتحليل والتعريف والبناء والاشتقاق هي اوجه متعددة لعملية

(19) Die Grundlagen der Arithmetik.

التحليل المنطقي • ولكننا هنا سنحاول رسم الخطوط الاساسية العامة للتحليل المنطقي عند فريجه آخذين بنظر الاعتبار أهمية هذه الطريقة وعلاقتها ببحوثه المنطقية والرياضية معا •

(أ) تحليل اللغة

ترتبط نظرية فريجه المنطقية بتحليل اللغة الى مستوياتها ، فلا يمكن فصل نظرية فريجه عن المعنى المرتبط بالرموز ، اذ ليست الرموز في اعتقاده مجرد اشارات ليس لها معنى ، بل انه يرى ان يكون لكل رمز معنى معين • ولكي يقوم بناء المنطق بدأ فريجه بتحليل اللغة فاصدر عددا من المقالات الهامة(٢٠) التي تبين اهتمامه بعلاقة المنطق باللغة(٢١) •

حلل فريجه اللغة الى ثلاثة مستويات هي المستوى الرمزي البحت ومستوى المعاني ومستوى الدلالات ، وبينما يرتبط المعنى بالرمز نجد الدلالة عند فريجه اشياء غير لغوية خارجة عن نطاق اللغة ذاتها • ولكن المهم عند فريجه في هذا التحليل غايته التي يسعي اليها في بناء نظام منطقي فيه الرموز ليست علامات فقط ، بل هي علامات لها دلالتها مرتبطة بالافكار ، فليست الرياضيات والمنطق في رأي فريجه مجرد رموز تتحكم فيها قوانين وقواعد تساعد على الاشتقاق والاستنتاج ، بل ان للرياضيات فائدة عملية في الحياة اليومية ، لذلك لابد ان تشير العلامات الى اشياء وان تكون العمليات الرياضية ذات نفع • ومن هذا المنطلق الفلسفي يحاول فريجه من تحليله للقضايا والمفاهيم الرياضية معرفة الاساس الذي تستند عليه • فالاعداد مثلا ليست ارقاما فحسب ، بل هي ذات معان واستعمالات ، فالعدد ٢ مثلا يشير الى كل زوج من الاشياء في الطبيعة ، فهو من جهة رمز من الرموز الرياضية

---

(٢٠) وهذه المقالات هي :

Über Sinn und Bedeutung
Funktion und Begriff
Über Begriff und Gegenstand
Der Gedanke
Die Verneinung

(٢١) انظر [نظرية جوتلوب فريجه المنطقية « اللغة والمنطق »] •

له معنى معين في الذهن ويشير الى اشياء في العالم الخارجي • من هنا نجد القوانين في التحليل في اللغة والرياضيات •• ولقد استفاد رودلف كارناب[٢٢] من تحليل فريجه للرموز او للعبارات والقضايا محاولا ايجاد نظرية جديدة في التحليل المنطقي •

يميز فريجه في تحليله للغة بين المعنى والدلالة ، وهذا التمييز شبيه لحد كبير بما هو معروف في المنطق بالمفهوم والماصدق • ولهذه الطريقة التي يقترحها فريجه في التحليل المنطقي أهمية كبيرة بالرغم من تجاهل الكثيرين لها عندما نشر مقالته « حول المعنى والدلالة » • ولكي نوضح التحليل المنطقي يجدر بنا الآن سياق بعض المبادىء العامة المستخلصة من دراسات فريجه في هذا الحقل •

١ – هناك تعابير معينة هي اسماء لاشياء تدل عليها • والى جانب ذلك يجب ان نميز المعنى للتعبير عن الشيء الذي يشير اليه •

٢ – ان التعبيرين « نجم الصباح » و « نجم المساء » لهما دلالة واحدة وذلك لان كل تعبير منهما يشير الى الشيء نفسه وهذا الشيء هو كوكب معين • وهذا يقودنا الى القول ان نجم الصباح هو نجم المساء من حيث الدلالة •

٣ – ان التعبيرين « نجم الصباح » و « نجم المساء » مختلفان من حيث المعنى ، لاختلاف الفكرة التي يعبر عنها كل اسم من هذه الاسماء •

ويزودنا فريجه الى جانب هذا التحليل بتحليل آخر يستند الى ما تقدم واضعاً بذلك نظريته في الاستعاضة التي يمكن تلخيصها بالشكل الآتي :–

٤ – اذا كان لتعبيرين او اسمين الدلالة نفسها ، فبامكاننا استعاضة احدهما بالآخر اذا ظهرا في تعبيرين مختلفين • فاذا فرضنا ان للاسم أ الدلالة نفسها للاسم ب وظهر الاسم ب في تعبير مركب مثل [ل م ب] ، فاننا نستطيع الاستعاضة عن ب بالاسم أ دون ان يكون هناك خلل في اشارة التعبير الجديد [ل م أ] للشيء الذي سبق للتعبير القديم ان دل عليه •

٥ – اذا كان لتعبيرين او اسمين معنى واحد ، فبامكاننا استعاضة احدهما بالآخر •

ويمكننا النظر الى هذه الطريقة المنطقية في التحليل من وجهة اخرى وذلك

(22) Carnap, R. Meaning and Necessity.

باعتبار الاسماء رموز لفئات ، فالمعنى المرتبط بالرمز يصبح هو المحمول الذي يحمل على جميع الافراد التي تقع تحته سواء كانت الفئة ذات عضو واحد او عدد كبير متناه أو لامتناهٍ من الاعضاء • وتصبح الدلالة الماصدق او الافراد الذين يصدق عليهم المفهوم • وعلى هذا الاساس يجدر بنا ان ننظر الى هذا التمييز بين المعنى والدلالة بطريقة جديدة ، فنتوصل منها الى الحقائق الآتية :-

٦ - اذا كان للاسم معنى ودلالة معا ، فان الفئة تكون :-

أ - أما ذات عضو واحد يحمل عليها المحمول مثال قولنا « رئيس الجمهورية العربية المتحدة » حيث تكون هذه الصفة هي مفهوم الفئة ، ويكون الرئيس جمال عبدالناصر هو العضو الوحيد الداخل في هذه الفئة •

ب - او ان تكون محتوية على اكثر من عضو واحد ، بحيث يحمل على الافراد محمول يشتركون فيه • مثال قولنا « حيوان عاقل » الفئة التي تضم بني الانسان •

٧ - اذا كان للاسم معنى من دون دلالة ، فان الفئة في هذه الحالة تكون فارغة لا تحتوي على اعضاء مثال قولنا « حورية البحر » وهو اسم يمكن النظر اليه كفئة باعتباره ذو معنى لا دلالة له •

ولهذا التحليل في معرض الفئات اهمية كبيرة في نظرية فريجه في تعريف الاعداد كما له أهمية كبيرة في التمييز بين القضايا الفارغة التي لامعنى لها والقضايا المفيدة التي يمكن الحكم عليها بالصدق او الكذب •

(ب) تحليل الرياضيات والمنطق

ان الهدف الاساسي الذي كان ينشده فريجه من بناء المنطق هو ارجاع المفاهيم والقضايا الرياضية الى مبادىء ومفاهيم المنطق ، وقد عمل لاجل ذلك على مستويين :-

١ - في تحليل الافكار الرياضية لمعرفة الاساس المنطقي الذي تقوم عليه كما هو واضح في تحليله للعدد والدالة مثلا •

٢ ـ في ابراز القوانين الاستنتاجية التي يعمل بهـا عالم الرياضيات في البرهان واخضاعها منطقيا الى قضايا او بديهيات منطقية قليلة تؤلف النظرية الاستدلالية للرياضيات •

ومن الضروري ان نشير هنا الى ان مفهوم المنطق عند فريجه يختلف عما هو معروف عند المناطقة التقليديين ، لانه يرى ان المنطق علم استدلالي وانه لاتوجد حدود فاصلة بينه وبين علم الحساب ، لذلك لابد من تخليصه من كل اثر من آثار علم النفس • وقد كرس فريجه بالفعل كتابه « أسس علم الحساب » لهذه الغاية وهي تخليص المنطق من آثار علم النفس ، ومحاولة ربط الرياضيات بالمنطق بتحليل دقيق لمفاهيم الرياضة وارجاعها بالتعريف الى مفاهيم منطقية • واذا كانت مهمة فريجه الاولى تتجلى في بناء اللغة الرمزية لتكون قاعدة استدلالية للرياضيات ، فانه حاول ان يربط الرياضيات بالمنطق عن طريق ايجاد المفاهيم المنطقية لتعريف مفاهيم علم الحساب •

ولقد برزت قابلية فريجه التحليلية واضحة عندما طرح السؤال في مقدمة كتابه « أسس علم الحساب » « ماذا يكون العدد واحد ؟ » ، فراح يدرس بتحليل منطقي بارع احتمالات تعريف العدد والاخطاء المترتبة على فهم علماء الرياضيات لهذا المفهوم وعدم اهتمامهم بماذا يكون العدد واحد مثلا ، لاعتقادهم ان ذلك لا يحتاج مثل هذا الاهتمام وان كتب الرياضيات الابتدائية غنية باعطاء الفكرة دون صعوبة ومن دون حاجة للتعريف • ولكي يحقق فريجه ما يريد تحقيقه مستعينا بالتحليل للفكرة والرمز والقضية ، بدأ بمناقشة علمية لآراء الكتاب حول طبيعة قضايا علم الحساب ليصل الى نتيجة حاسمة فيما اذا كانت قوانين الحساب حقائق استقرائية ام لا ، وهل هي قضايا قبلية ام بعدية • ثم انتقل بعد ذلك لمناقشة الآراء لبعض الكتاب حول فكرة العدد وفيما اذا كان العدد فئة ، وكانت غايته طرح المشكلة اولا وبيان صعوبة حلها بالطرق القديمة ثم محاولته تعريف العدد مستعينا بالمفاهيم المنطقية • ولا نريد هنا تحليل آراءه ومناقشتها حول العدد وطبيعة القضايا ، لان ذلك موضوع خاص سنأتي عليه في المستقبل • اما الآن ، فانه يظهر لنا من فحص هذا الكتاب انه أهتم بالتعريف وان المحاولة جميعها تتركز في ايجاد تعريف صحيح للعدد ، لذلك لابد لنا ونحن في صدد البحث في طريقة التحليل المنطقي ان نتناول

طريقة التعريف عند فريجه باعتبارها اساسا مهما في التحليل وعملية جوهرية في تحليل الافكار الرياضية والمنطقية .

ناقش فريجه مبادىء التعريف في الجزء الاول من كتابه « القوانين الاساسية لعلم الحساب »[٢٣] وفي الجزء الثاني من الكتاب نفسه[٢٤] ، واهم ما جاء في الجزئين من مبادىء هي :-

١ - ان كل اسم في التعريف يجب ان يكون له معنى ، فالاسم الذي نريد تعريفه والذي نطلق عليه عبارة « الاسم المعرَف » يجب ان يكون الحد المعرِف له حاويا على اسماء معروفة المعنى ، بحيث نستطيع بعد التعريف فهم الحد المعرَف .

٢ - لايمكن تعريف الرمز او الاسم مرتين او اكثر بتعريفات مختلفة ، لان ذلك من شأنه ان يثير الارباك والغموض ، فاذا ما عرف رمز ما فان عليه ان يحتفظ بهذا التعريف اينما وجد في مكان آخر . أما اذا كان الامر غير ذلك بان يعرف الرمز بتعريف يخدم مسألة معينة ويستبدل التعريف في مكان آخر لكي يطابق الوضع الجديد ، فان للرمز عندئذ عدة معان مختلفة ، وهذا أمر غير جائز في التعريف .

٣ - يجب ان يكون الاسم المعرَف بسيطا فلا يحتوي على رموز ثانوية او معروفة او توضيحية ، لان تركيب الاسم من هذه الرموز يسبب الارباك والغموض ، لذلك لابد ان يقتصر الاسم المعرَف على الرموز التي لابد ان تعرف وان تعريفها ضرورة منطقية .

٤ - يجب ان يكون الاسم المعرَف مساوياً في الدلالة والقيمة للاسم المعرِف ، بحيث اننا نستطيع الاستعاضة عن الاسم المعرِف بالاسم المعرَف اينما نجده في العمليات المنطقية .

٥ - لا يجوز ذكر الاسم المعرَف او جزء منه في الحد المعرِف لان مثل هذا

(23) Frege, G.,Grundgesetze der Arithmetik. Vol. I. P. 51.

(24) Ibid., Vol. 2. P. 69.

التعريف يقودنا الى حلقة مفرغة • لذلك من الضروري ان لايذكر الحد المعرَف في الحد المعرِف • •

تعتبر نظرية التعريف جزءاً اساسيا في العمل المنطقي والتحليل ، واننا لانستطيع ان نتقدم في التحليل دون الاستعانة بالتعريف • فمن المعروف في المنطق ان هناك افكاراً غير معرفة واخرى معرفة ، ولكي نعرف الرموز او الاسماء علينا استخدام الرموز غير المعرفة ، وعملية التعريف هذه مفيدة في النظرية الاستدلالية ، ولقد تنبه فريجه الى ذلك عندما اتخذ من النفي والالزام رموزا غير معرفة وعرف بواسطتها البدل والعطف مثلا • ولنظرية التعريف تطبيقات منطقية كثيرة ، ولكن الدافع الاساس الذي دفع فريجه الى الاهتمام بالتعريف والقواعد العامة له هو انه وجد التعريفات التي وضعها علماء الرياضيات والفلاسفة غير مجدية[٢٥] ، كما وجد الى جانب ذلك اهمال علماء الرياضيات لتعريف مفهوم العدد ، فاخذ على عاتقه هذه المهمة في التعريف واضعا أمام عينيه غاية أساسية هي ارجاع الرياضيات الى المنطق • فانصب تحليل فريجه المنطقي على ناحيتين مهمتين :ـ

١ ـ تعريف المفاهيم الرياضية تجنبا للغموض والابهام من جهة ، وبيان ان الحدود المعرِفة لهذه المفاهيم لا تحتوي غير الافكار المنطقية من جهة ثانية •

٢ ـ ايجاد العلاقة بين المنطق والرياضيات ، وذلك بالكشف عن النظرية الاستدلالية المنطقية التي يستخدمها عالم الرياضيات عند البرهان على مبرهناته •

وكانت المهمة التي اضطلع بها فريجه في اعماله المنطقية هي محاولة البرهان على ان علم الحساب يرجع الى المنطق ، لان المنطق هو الاساس للرياضيات • وبالرغم من التطورات التي حصلت بعد فريجه الا ان عمله في التحليل المنطقي في حقل التعريف وارجاع الرياضيات الى المنطق سيبقى له قيمته التاريخية والعلمية •

(ج) توضيح طريقة فريجه الرمزية

والى جانب ما قدمناه في التحليل المنطقي يجدر بنا ان نتعرف الآن على الجانب الآخر من هذه الطريقة وهو جانب مهم في المنطق ، لان الطريقة الرمزية هي الجزء

(25) Frege, G., Die Grundgesetze der Arithmetik. K. Vol. II. P. 72.

الجوهري في العملية المنطقية باعتبارها طريقـــة في عرض النظام المنطقي بافكاره ومبادئه واستنتاجاته • ويظهر ان من اكبر الصعوبات التي تواجه الدارس لمنطـق فريجه هي طريقته الرمزية ، لانه اتبع طريقة هندسية جديدة تختلف عن الطريقة الرياضية المتعارف عليها في الجبر والتحليل والحساب مثلا • واختار هذه الطريقة ذات البعدين للتعبير الدقيق عن مفاهيمه المنطقية الجديدة • ولاجل فهم هـــذه الطريقة يجدر بنا اتبـــاع بعض الاسس التي يذكرها فريجه في كتـــابه الاول Begriffsschriff واهم هذه الاسس هي :-

١ - اذا رمزنا للقضية بالحرف A ، فان فريجه الذي اخذ بالمنطق ذو القيمتين يعبر عن القضية A بالشكل الآتي :

وهذا معناه ان الرمز A قضية تحتمل A ——

الصدق او الكذب •

٢ - أما اذا اراد القول ان القضية A صادقة مثلا فانه يختار خطا عموديا في نهاية الخط الافقي للدلالة على صدق القضية A

A ——|

٣ - ويستعمل فريجه للنفي اشارة صغيرة توضع على الخط الافقي لتدل عـــلى ان القضية كاذبة او ان القضية A منفية (¬ A)

——|—— A

٤ - أما الالزام ، فان فريجه يختار خطا جديدا يعبر به عن العلاقة بين القضيتين، فاذا قلنا ان القضية B تلزم القضية A فان فريجه يعبر عن هـــذا الالزام بالشكل الآتي :

حيث تكون القـــراءة من A ——|——

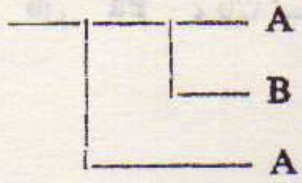
الاسفل ، فالخط الموجود B ——|

أمام القضية B هو الخط الذي يدل على ان B قضية وكذلك الخط الموجود أمام القضية A ، أما الخط الذي يربط بين الخطين فهو مايعرف بالالزام وعلى ذلك يمكن التعبير عن هذا الرمز بما يأتي (B → A)

٥ ـ اما اذا كانت ثلاث قضايا متلازمة ، فان فريجه يطبق الطريقة السابقة مراعيا تسلسل القضايا كما في الشكل :ـ

وتقرأ : A تلـــزم B التي تلزم A

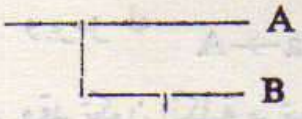
ويعبر عنها بالرمز الآتي :ـ



$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

٦ ـ ويستخدم فريجه النفي مع الالزام فتختلف القضايا تبعا لوضـــع النفي في الشكل ، ويمكننا توضيح ذلك كما يأتي :ـ

أ ـ عندما تكون القضية B منفية ويلزم عنها القضية A ويعبر عنهـا بالرمز الآتي :ـ



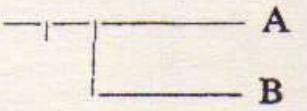
$\neg B \rightarrow A$

ب ـ عندما تكون القضية A منفية فيصبح الشكل كما يأتي :

ويعبر عنها بالرمز الآتي :

$B \rightarrow \neg A$

جـ ـ عندما تكون القضية A ، B في حالة النفي



ويعبر عنها بالرمز الآتي :ـ

$\neg (B \rightarrow A)$

٧ ـ ويستخدم فريجه رمزا جديدا للكلية حيث يجعل في وسط خط القضية او الحكم تجويفا صغيرا يضع فيه رمز الحد ، فاذا اردنا القول : ان كل a X هي x ، فاننا نعبر عن ذلك بالشكل الآتي :ـ

ويمكننا التعبير عن هذا الشكل بالرمـــز الآتي

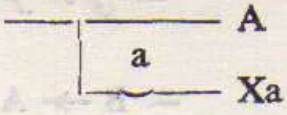
(a) X a حيث يشـير (a) الى الكلية .

٨ ـ ويربط فريجه الكلية بالالزام ، فاذا اردنا التعبير عن قولنا كل a اذا كانت Xa فان Pa ، فاننا نستخدم الشكل الآتي :ـ

ويعبر عنه كذلك كما يأتي (a) Xa → Pa

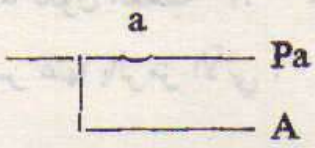
٩ ـ ويختلف وضع هذه الفجوة التي تدل على الكلية باختلاف القضية .

أ ـ اذا كانت الكلية مرتبطة بـ X فقط فان الشكل سيكون :



ويرمز له (a) Xa→A

ب ـ وقد تكون الكلية مرتبطة بالقضية الاخرى كما في الشكل



ويرمز له A → (a) Pa

١٠ـ كما يستخدم فريجه النفي مع الالزام والكلية كما في الشكل الآتي :ـ

ويعبر عن هذه القضية كما يأتي (a) [Xa → ـ Pa]

كما يمكن استخدام النفي قبل الكلية وبعدها وسنأتي على بيان ذلك في بحوث أخرى .