Building a cost function model to compare the efficiency of the serial sampling plan and the single sampling plan in qualitative control

Lecture. Aseel Samir Mohammed, PHD Al-Kindi College of Medicine – Family and Community Medicine Branch
aseelsameer@kmc.uobaghdad.edu.iq
Asst. Lecture. Asma Hussein Alwan
University of Baghdad - College of Education Ibn Rushd for Human Sciences
Asst. Lecture. Intisar Obaid Hassoun
University of Baghdad - College of Education Ibn Al-Haytham for pure sciences

DOI: 10.31973/aj.v2i138.1750

Abstract:
In this research a comparison between single and sequential S.P are performed. A special inspection cost model is built to compare between the two kinds of sampling, this model show that the sequential S. P is superior to the single S. P. All the notations needed for this purpose are explained.
Keywords: single sampling, sequential sampling.

بناء أنموذج دالة كلفة للمقارنة بين كفاءة خطة المعاينة المتسلسلة وخطة المعاينة المفردة في السيطرة النوعية

م.د. أسيل سمير محمد
كلية طب الكندي –فرع طب الاسرة والمجتمع
aseelsameer@kmc.uobaghdad.edu.iq

م.م. اسماء حسين علوان
جامعة بغداد– كلية التربية للعلوم الإنسانية– ابن رشد

م.م. أنتصار عبيد حسون
جامعة بغداد– كلية التربية ابن الهيثم للعلوم الصرفة

(مُلَخَّصُ البَحث)

عرضت في هذا البحث خطة المعاينة المفردة والمتسلسلة الضرورية لفحص المنتوج بواسطة العينات بدلا من الفحص الشامل، وتم بناء أنموذج لتكاليف الفحص، بوصفها جزءا مهما من تكاليف السيطرة النوعية، وكتبت برنامج لتلك الدالة واجريت المقارنة بين كلفة النوعين من خطط المعاينة لقيم مختلفة من N،β ,α ,Kv ثم بحسب الخطأ النسبي بهدف المقارنة وعرضت كذلك في البحث كل الرموز والتكاليف والخطوات الضرورية لبناء الأنموذج.

الكلمات المفتاحية: المعاينة البسيطة المفردة، المعاينة التتابعية، أنموذج الكلفة.

المقدمة:

يقدم علم الاحصاء اساليب احصائية متطورة للسيطرة على النوعية ، إذْ يتم تقييم النوعية بواسطة العينات بدلا من الفحص الشامل مما يؤدي خفض التكاليف واكتشاف الاخطاء وتصحيحها ، وكل ذلك يؤدي إلى زيادة كفاءة ضبط النوعية قياسا إلى الأساليب الأخرى ، ومن أهم الأساليب الاحصائية خرائط السيطرة وأسلوب الفحص بالعينة وهذه أنواع منها ما يعتمد خطة المعاينة المفردة Single Sampling Plan ومنها ما يعتمد خطة المعاينة المزدوجة Double Sampling Plan ومنها ما يعتمد على المضاعفة Multiple Sampling Plan ومنها ما يعتمد على المعاينة المتسلسلة Sequential Sampling Plan. وقد توالت البحوث في هذا الموضوع إذْ درس الباحثان Dodge–Romige في بحوثهما المشتركة منذُ عام ١٩٧٤ أعداد جداول لاستخراج خطة المعاينة المفردة والمزدوجة بحسب معيار AOQLLTPD كذلك درس الباحث Hald في بحوثه التي بداها عام ١٩٦٠ بناء نماذج لتحديد خطط المعاينة المفردة والمزدوجة والتتابعية الاعتيادية والبيزية ، وقام ببناء نماذج خاصة للسيطرة وتحديد معالم خطة المعاينة المفردة والمزدوجة والثابتة والبيزية والتي تعمل على تصغير القيمة المتوقعة لدالة الكلفة الكلية للسيطرة النوعية ، وتناول باحثون عراقيون بناء نماذج عديدة للسيطرة النوعية نسب لتوقعات احتمالية مختلفة (سوف نشير لهم في قائمة المصادر) .

ويَعدَّ بحثنا هذا تواصلا مع جهود الآخرين إذْ سيتم فيه مقارنة كفاءة خطة المعاينة المفردة مع خطة المعاينة المتسلسلة من حيث تكاليف الفحص بوصفها جزءا مهما من تكاليف السيطرة النوعية الكلية التي اشتملت تكاليف الفحص، وتكاليف قبول وحدات غير جيدة، ولأبد من تعريف خطة المعاينة البسيطة والمتسلسلة.

- خطة المعاينة البسيطة (المفردة) :Single Sampling Plan

في هذه الخطة يتم فحص عينة محسوبة بصورة عشوائية من الدفعة المنتجة N، ويلاحظ عدد المعيب في العينة (x)، فاذا كان x أقل أو يساوي عدد القطع المعيبة المسموح بها في العينة (c)، عندئذ يتم قبول الدفعة المنتجة عندما (x≤ c)، وترفض الدفعة المنتجة ويجري فحص شامل للكمية المتبقية (N–n) عندما يكون (x> c)، ويتم تصليح الوحدات المعيبة كافة الموجودة في الكمية (N–n) أو استبدالها. أما احتمال قبول المنتوج ذو النوعية Pيحدد بحسب خطة المعاينة المفردة (n, c) ولكل توزيع من توزيعات المعاينة من حل المعادلة:

$$P_\alpha = {}^{P}_{r}(x \le c)$$

$$p_{\alpha=} \sum_{x=0}^{c} C_X^n p^x q^{n-x} \qquad -----(1)$$

تحت شرط معاينة ذي الحدين ويكون كذلك تحت شرط بواسون

$$p_{\alpha-\sum_{x=0}^{c}\frac{e^{-m}m^{x}}{x!}}$$

- خطة المعاينة التتابعية :Sequential Sampling Plan

في هذا النوع من الفحص لا يمكن تحديد حجم العينة مسبقا، وانَّما يعتمد تحديده على نتائج الفحص مما يؤدي إلى السرعة في العمل وتخفيض تكاليف الفحص.

ويتم اختيار وحدات العينة واحدة تلو الأخرى أو بحسب أسلوب step by step أو على شكل مجاميع صغيرة، ويتم وضع احتمالات معينة مثلا:

p_0 : احتمال الحصول على المتغيرات بشكل متعامد عندما تكون فرضية العدم H_0هي الصحيحة اي

$$p_{0=}{}_{r}^{p}{}_{(x_{1,}x_{2},\ldots,x_{n}\mid H_{0})}$$

p_1 : احتمال الحصول على المتغيرات التتابعية نفسها $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ علما بان الفرضية البديلة هي الصحيحة

$$p_{1=}p_{(x_{1},x_{2},\ldots,x_{n}\mid H_{1})}$$

وتدعى النسبة $\frac{p_1}{p_0}$ نسبة الاحتمال المتسلسل، وتشير p_0 الى قيمة AQL(وهو مستوى النوعية المقبول في الانتاج وتمثل فيه قيمة AQ معدل النوعية المعتادة Process Average المقبول لدى المنشأة والمحدد مسبقا.

أما قيمة p_1فهي تعبر عن LTPD (Lot Tolerance Percentage) Defectiveنسبة المعيب المحتملة في الدفعة، وهي قيمة مستوى نوعية الانتاج والتي تكون قريبة من مخاطرة المستهلك β اي احتمال قبول الدفعة المنتجة ذات مستوى النوعية دون المستوى المطلوب والمحدد مسبقا، فعند وجود عينة حجمها nمن المتغيرات التتابعية $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ تحتوي على d_n من الوحدات المعيبة، فإنَّ احتمال الحصول على عينة من المتغيرات التتابعية هو:

$$p_{n=}p^{dx}{}_{(1-p)^{n-dx}} \qquad \text{-------} (2)$$

وفي حالة فرضية العدم فإنَّ:

$$p_{0n} = p_0^{dn}\,(1 - p_0)^{n-dn}$$

ومن الاخطاء الناجمة من الاختبار هناك خطأ من النوع الأول وهو احتمال رفض فرضية العدم علما بأنها صحيحة ونرمز له (α)، ويمثل α مجازفة المنتج، اما النوع الثاني

فهو الخطأ من النوع الثاني β وهو احتمال قبول فرضية العدم (H_0) ، علما بان الفرضية البديلة (H_1) هي الصحيحة وتمثل القيمة β مجازفة المستهلك.

وفي خط المعاينة المتسلسلة توجد ثلاث حالات لتحديد القبول أو الرفض أو استمرار المعاينة، فإذا كان $\frac{p_1}{p_0} \geq$A نرفض H_0، اما إذا كان $\frac{p_1}{p_0} \leq \beta$ تقبل H_0 وعندما تكون B< $\frac{p_1}{p_0}$ < A تستمر عملية المعاينة والفحص، اما قيمة A= $\frac{1-\beta}{\alpha}$ وقيمة B = $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

وتمثل p النسبة المئوية للمعيب غير المعروفة في الدفعة، وغالبا ما تشير إلى القيم الآتية :

$$\text{Log}\ \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < \log B \qquad \text{------ (3)} \qquad B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

ونستمر بالمعاينة عندما B < $\frac{p_{1n}}{p_{0n}}$ < A والتي تختصر إلى:

$$\frac{Log\frac{\beta}{1-\alpha}+nLog\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\frac{p_1}{p_0}-\log\frac{1-p_1}{1-p_0}} < d_n < \frac{Log\frac{1-\beta}{\alpha}+n\,Log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{Log\frac{p_1}{p_0}-Log\frac{1-p_1}{1-p_0}} \qquad \text{-------(4)}$$

إذْ إنَّ $a_n < d_n < r_{nn}$ وتمثل a_n عدد القبول بينما تمثل r_n عدد الرفض.

فعندما تكون $d_n \geq r_n$ نرفض الدفعة وبالعكس إذا كانت أقل يتم قبول الدفعة وتسهيل الرموز نفرض ان:

$$h_0 = \frac{Log\frac{\beta}{1-\alpha}}{Log\frac{p_1}{p_0}-Log\frac{1-p_1}{1-p_0}} \quad , \quad h_1 = \frac{Log\frac{1-\beta}{\alpha}}{Log\frac{p_1}{p_0}-Log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$$

وإذا كانت الفرضية البديلة هي الصحيحة فإنَّ:

$$p_{1n} = p_1^{dn}(1-p_1)^{n-dn}$$

وعند تطبيق نسبة الاختبار التتابعي (SPRT):

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{p_1^{dn}\,(1-p_1)^{n-dn}}{p_0^{dn}(1-p_0)^{n-dn}}$$

يتم رفض الدفعة عندما

$$d_n Log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) + (n-d_n) Log\ \frac{1-p_1}{1-p_0} \geq Log\ A\ d_n[Log\ \frac{p_1}{p_0} - Log\ \frac{1-p_1}{1-p_0}]$$

$$\geq \text{Log}\ -n\ Log\ \frac{1-p_1}{1-p_0}$$

اي ان الدفعة نرفض عندما $d_n \geq \frac{Log\frac{1-\beta}{\alpha}-n\,Log\frac{1-p_1}{1-p_0}}{Log\frac{p_1}{p_0}-Log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$

وتقبل الدفعة عندما يكون S= $\frac{Log\frac{1-p_0}{1-p_1}}{Log\frac{p_1}{p_0}-Log\frac{1-p_1}{1-p_0}}$

$r_n = h_1 + n_s$, $a_n = h_0 - n_s$ عندئذ تكتب معادلتي القبول والرفض:

وبالإمكان تعميم الخطوات أعلاه لتوزيعات أخرى من توزيعات المعيب منها بواسون الطبيعي.. ولكننا لسنا بصدد شرح كل هذه التفاصيل إذْ إنَّ المهم في الموضوع هو عرض تكاليف السيطرة النوعية ولاسيَّما تكاليف الفحص والتي تشكل محور بحثنا.

- صياغة أنموذج دالة الكلفة:

لأبدَّ لنا أولاً من ايضاح الرموز الضرورية، إذْ إنَّ:

N تمثل حجم الدفعة من الانتاج ، Y تمثل عدد المعيب الكلي في الدفعة ، n تمثل حجم العينة ، y تمثل عدد المعيب في العينة ، $f_N^{(y)}$تمثل التوزيع الاحتمالي لعدد المعيب في الدفعة Nذات مستوى النوعية p ، وقد يكون ثنائي الحدين.

$$f_N^{(y)} = C_y^N p^y (1-p)^{N-y} \quad -----(5)$$

اي ان احتمال قبول الدفعة N التي تحتوي على y معيب يحدد من احتمال قبول العينة n التي تحتوي على y وحدة معيبة وعدد الوحدات المعيبة المقبولة C_0، ومن جانب الايضاح بالنسبة لخطة المعاينة المفردة (n, c) يكون احتمال القبول هو:

$$p^a(N,y)^{(n,y)} = \frac{C_y^{n0} C_{y-n}^{N-n_0}}{C_y^N} \quad \text{For} \begin{pmatrix} n = n_0, y = 0,1,\dots,c_0 \\ 0 \quad otherwise \end{pmatrix}$$

----- (6)

$$p^r(N,y)^{(n,y)} = \frac{C_y^{n0} C_{y-n}^{N-n_0}}{C_y^N} \quad \text{For}$$

$$\begin{pmatrix} n = n_0, y = c_{0+1},\dots,\min(c_0,y) \\ 0 \quad otherwise \end{pmatrix} \quad ----- (7)$$

لنفرض ايضا ان K_s تمثل كلفة المعاينة والفحص للوحدة الواحدة، K_r تمثل كلفة التصنيف للوحدة الواحدة، dتمثل التكاليف المترتبة عن الوحدة المعيبة الداخلة إلى العملية الانتاجية.

إذا تم قبول الدفعة Nالمحتوية على yوحدة معيبة أو رفض الدفعة استناداً إلى قرار قبول أو رفض العينة n ذات المعيب y، فإنَّ تكاليف الفحص الكلية هي في حالتي القبول والرفض ستكون في حالة القبول $k_s n + d(Y-y)$ ، اما في حالة الرفض $k_s n + k_r^{(N-n)}$

اما القيمة المتوقعة للتكاليف نسبة للتوزيعات $p^a_{(N,u)}, p^r_{(N,y)}$ ، f_N والتي تعبر عن معدل تكاليف الفحص المقترنة بدفعة واحدة حجمها N، وسوف نرمز لمعدل الكلفة ل k_N وتمثل:

$$k_N = k_s \sum_{Y=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{y=0}^{N} [p^a (N,Y)^{(n,y)} + p^r (N,Y)^{(n,y)}] f_N^{(y)} + d \sum_{y=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{y=0}^{N} (Y-y) p^a (N,Y)^{(n,y)} f_N^{(y)} + k_r \sum_{Y=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{y=0}^{N} (N-n) p^r (N,Y)^{(n,y)} f_N^{(y)} \quad \text{------ (8)}$$

وتُعدَّ تكاليف الفحص جزءا من التكاليف الكلية للدفعة، ويمكن المقارنة بين خطط معاينة مختلفة عن طريق تكاليف الفحص، أو عن طريق التكاليف الكلية، إذْ إنَّ تكاليف الفحص متغيرة بالنسبة للتكاليف الكلية، لذلك يمكن اعتماد المقارنة بواسطة تكاليف الفحص فقط. ولكي نحصل على أنموذج تكون عنده تكاليف الفحص مهمة، وتعتمد في المقارنة بين الخطتين، وسوف نفرض ان العملية الإنتاجية هي ليست تحت السيطرة، ونفرض ان $f_N^{(y)}$ هو توزيع متعدد Poly Distribution بحسب الصيغة:

$$f_N^{(Y,\alpha,\beta)} = C_y^N \frac{y(\alpha+\beta)y(\alpha+y)+y(\beta+N-y)}{y(\alpha)y(\beta)+y(\alpha+\beta+N)} \quad \text{----- (9)}$$

وسبب هذا الافتراض هو:

١- لقيم مختلفة من α، β فإنَّ هذا التوزيع يحتوي على أنواع مختلفة من التوزيعات.

٢- ممكن تبسيط العمليات الحسابية لأنَّ التوزيع الشرطي لعدد المعيب في الكمية المتبقية بعد سحب العينة n، هو توزيع المعيب الاصلي نفسه.

وبعد كتابة برنامج خاص بالمعادلة (٨) التي تمثل تكاليف الفحص ولمجاميع مختلفة من قيم α، β بحيث يكون عندها متوسط المعيب هي ($\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 0.02$).

سيتم مقارنة تكاليف الفحص لخطط معاينة مفردة مختلفة تم الحصول عليها، كذلك خطط مختلفة لخطة المعاينة المتسلسلة وسيتم حساب الخطأ النسبي الذي يمثل $\frac{\text{المفردة الكلفة}-\text{المتسلسلة الكلفة}}{\text{المتسلسلة الكلفة}} * 100$

وعلى اساس ان معدل كلفة الفحص للوحدة الواحدة ومعدل كلفة الرفض (وهو الكلفة المترتبة عن اتخاذ قرار خاطئ، قرار رفض دفعة جيدة) متساوي اي ان $k_s = k_r$ = 0.02، والجدول الآتي يلخص النتائج التي تم الحصول عليها لثلاث مجموعات مختلفة من قيم N = 100, 200, 400:

الدفعة N	معالم خط للمعاينة المفردة (n, d)	معالم خط للمعاينة المتسلسلة (n, d)
100	(20,2)	(13,1)
200	(45,4)	(30,2)
400	(90,6)	(60,4)

وتم اختيار خمسة تراكيب مختلفة ل α، βيكون عندها $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 0.02$

تراكيب المعالم	α	β
1	2^{-5}	1.53125
2	2^{-6}	0.76563
3	2^{-7}	0.382813
4	2^{-8}	0.1914063
5	2^{-9}	0.095732

جدول رقم (١): نتائج الفحص عن خطة المعاينة المثلى والمتسلسلة

تركيب المعالم	N	كلفة المفردة (١)	كلفة المتسلسلة (٢)	الخطأ النسبي $\frac{(1)-(2)}{(2)}$
1	100	0.1966	0.19405	1.3
	200	0.16019	0.15405	4.0
	400	0.14672	0.13885	5.7
2	100	0.13716	0.13615	0.7
	200	0.10689	0.10423	2.5
	400	0.09617	0.09197	4.6
3	100	0.09717	0.09676	0.4
	200	0.07322	0.07215	1.5
	400	0.06433	0.06254	2.9
4	100	0.07101	0.07086	0.2
	200	0.05271	0.05234	0.8
	400	0.04574	0.04501	1.6
5	100	0.05414	0.054087	0.1
	200	0.04054	0.04038	0.4
	400	0.03517	0.03468	0.8

فضلا عن ذلك حسبت تكاليف الفحص الكلية لخطة المعاينة المفردة المثلى وخطة المعاينة المتسلسلة ولحجم الدفعة N=500وقيم مختلفة من k_s ووضعت النتائج في الجدول الآتي ، إذْ يشير الرقم (١) إلى تكاليف المعاينة المفردة و (٢) إلى المعاينة المتسلسلة و (٣) إلى الخطأ النسبي وعندما $k_r = \frac{1}{2} k_s$ ، $k_s = k_r$.

جدول رقم (٢)

	k_s	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20
$k_r = k_s$	1	0.1932	0.1602	0.12363	0.09608	0.07115
	2	0.1889	0.15405	0.11523	0.08952	0.0660
	3	2.2	4.0	7.3	7.3	7.1
$k_r = \frac{1}{2}k_s$	1	0.27496	0.21992	0.16464	0.1318	0.1029
	2	0.27167	0.21737	0.16079	0.1262	0.0963
	3	1.2	1.2	2.4	4.3	6.9

يتضح من الجدول رقم (١) انه كلما أزدادت معدل تكاليف الفحص k_s فإن معدل تكاليف المعاينة المتسلسلة يكون أقل منها للمعاينة المفردة، مما يؤثر كذلك في أهمية خطة

الفحص المتسلسل في توفير تكاليف الفحص المهمة. فضلا عما ذكر، تمت المقارنة بين خطة المعاينة المفردة والمتسلسلة عندما $\alpha = 2 , \beta = 98 , \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$= 0.02 , N= 500

فإنَّ معدل كلفة الفحص للوحدة الواحدة عند الخطة المفردة هو (٠.٨٠٧٨) والمتسلسلة هو (٠.٧٨٤١) والخطأ النسبي هو $\left|\frac{|0.8078-0.7841}{0.7841}\right| * 100 = 2.9$ وهذا يعني ان مقدار التخفيض الناتج من استعمال خطة معاينة متسلسلة هـ ٢.٩% وهي نسبة جيدة

الاستنتاجات:

١- تتشابه خطوط المعاينة المفردة والمزدوجة من حيث الأساس في تكوين منحنى القبول، ولكنها تختلف في تكاليف الفحص، وتعتمد هذه التكاليف على معدل عدد الوحدات المختارة للفحص، وكذلك على الحد الأعلى من الوحدات أو العينات التي نحتاجها لفحص الدفعات.

٢- يكون معدل الكمية المفحوصة في المعاينة المتسلسلة أقل من معدل الوحدات المفحوصة في الأنواع الأخرى مثل المفردة أو المزدوجة، حيث تتطلب خطة المعاينة المزدوجة ثلث أو ربع ما تتطلبه البسيطة، بينما تتطلب خطة المعاينة المتسلسلة من ربع إلى نصف أقل من المفردة.

٣- في العينة المفردة يتم فحص عينة واحدة فقط، اما في المتسلسلة يتم فحص سلسلة من المفردات أو العينات.

٤- كانت نتائج الكلفة عند الخطة المثلى المتسلسلة أقل منها عند الخطة المفردة، كما هو واضح في الجدول رقم (١)، ولوحظ تزايد الخطأ النسبي كلما تزايد حجم الدفعة، وهو أمر طبيعي.

٥- لوحظ ايضا ان الحد الأعلى للكمية المفحوصة يكون أكبر في المعاينة البسيطة تليها المزدوجة ثم المتسلسلة.

التوصيات:

١- نوصي باستعمال خطة المعاينة المتسلسلة لأنَّ حجم العينة غير ثابت، وتعتمد نتائج الفحص فيها على نسبة الاحتمال المتسلسل.

٢- نوصي باعتماد مقاييس تكاليف الفحص كأساس في المقارنة بوصفه جزءا مهما من التكاليف الكلية للسيطرة النوعية خاصة بالنسبة للفحص التدميري، والذي يؤدي فيه فحص الوحدة إلى تلفها.

References:

Abdullah, K. M. (2006). بناء نموذج لدالة الكلفة الكلية في السيطرة النوعية تحت شروط معاينة التوزيع الاسي.College of Education - Tikrit university.

Dodge, H. F., & Romig, H. G. (1959). Sampling Inspection Tables. *Mathematics of Computation, 14*(71), 288-290. https://doi.org/10.2307/2003181

Hald, A. (1981). *Statistical theory of sampling inspection by attributes*. Academic Press.

Pfanzagl, J., & Schüler, W. (1970). The Efficiency of Sequential Sampling Plans Based on Prior Distributions and Costs. *Technometrics, 12*(2), 299-310. https://doi.org/10.1080/00401706.1970.10488669

Tang, K. (1988). Economic design of product specifications for a complete inspection plan. *International Journal of Production Research, 26*(2), 203-217. https://doi.org/10.1080/00207548808947854